

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI
FEDERICO II**



FACOLTÀ di INGEGNERIA

DIPARTIMENTO di INGEGNERIA INDUSTRIALE

SEZ. MECCANICA ed ENERGETICA

SCUOLA DI DOTTORATO IN INGEGNERIA INDUSTRIALE

TESI DI DOTTORATO IN INGEGNERIA DEI SISTEMI MECCANICI

XXV CICLO

**APPLICAZIONI DI METODICHE NON LINEARI PER
LO STUDIO MORFO-VIBRAZIONALE SU SISTEMI
MECCANICI COMPLESSI**

COORDINATORE DEL DOTTORATO

CH.MO PROF. ING.

FABIO BOZZA

Tutor

CH.MO PROF. ING.

VINCENZO NIOLA

Dottorando

VINCENZO AVAGLIANO

ANNO ACCADEMICO 2012 - 2013

*Alle mie nonne,
a Clorinda
e a tutta la mia famiglia*

Indice

Premessa	6
Introduzione	8
Capitolo 1	13
La Trasformata Wavelet	13
1.1 Introduzione	13
1.2 Considerazioni sulla trasformata trigonometrica discreta di Fourier	14
1.3 Funzioni a supporto compatto	22
1.4 Il sistema base di Haar	23
1.5 Analisi della multirisoluzione	30
1.6 La rappresentazione Wavelet	34
1.7 Obiettivi dell'analisi multirisoluzione.....	38
1.8 Smoother Wavelet Bases.....	44
1.9 Equazioni alle differenze.....	49
1.10 Base Hilbertiana	57
Capitolo 2	61
La Teoria del Caos	61
2.1 Caos.....	61
2.2 Sistemi dinamici.....	64
2.3 Spazio delle fasi o spazio di stato (<i>phase space</i>)	67
2.4 Punto fisso.....	72
2.5 Wavelet e caos	81
2.6 Mappa di Poincaré.....	81
2.7 Proprietà del piano delle fasi.....	83
2.8 Esponenti di Lyapunov	85
2.9 Il calcolo degli esponenti di Lyapunov attraverso il problema degli autovalori ed autovettori	97
Capitolo 3	100
Segnali random, richiami di statistica e metodologie di analisi	100
3.1 Generalità	100
3.2 Alcuni indicatori statistici	110
3.3 Le funzioni di auto-correlazione e cross-correlazione	117
3.4 I Processi aleatori stazionari	121
3.5 La funzione δ e l'integrale di convoluzione.....	125
3.6 Metodologia per lo studio dei sistemi caotici e non.....	131
3.6.1 Mappa di Poincaré.....	132
3.6.2 Metodo per la determinazione della dinamica evolutiva di una serie temporale.....	133
3.7 Metodologia per la ricostruzione della PMIV e PIV vibrazionale	153

Capitolo 4	157
Alcune considerazioni tecniche in merito agli accelerometri	157
4.1 Introduzione	157
4.2 Accelerometri: aspetti teorici e tecnici	158
Capitolo 5	170
Monitoraggio vibrazionale di un cambio automobilistico	170
5.1 Introduzione	170
5.2 Descrizione della prova di durata	171
5.3 Allestimento cambio	173
5.4 Risultati ottenuti con la vecchia metodologia di monitoraggio	175
5.5 Principali problematiche affrontate	176
5.6 Monitoraggio cambio automobilistico – Risultati Run 11	177
5.7 Monitoraggio cambio automobilistico – Risultati Run 20	181
5.8 Grado d’irregolarità	182
5.9 Diagramma ω vs K_ω – Risultati	186
5.10 Lyapunov e Kurtosis – Risultati	192
5.11 Mappa di Poincarè – Risultati	198
Capitolo 6	202
Diagnostica e monitoraggio vibrazionale di motori a c.i.	202
6.1 Introduzione	202
6.2 Set-up delle prove	203
6.3 Lo stato di “salute” del motore	206
6.4 La PMIV – Pressione Media vibrazionale	225
6.5 PMIV per motori a c.i. per compressione e ad accensione comandata	248
6.6 Discussione	252
6.6.1 Morfodinamica vibrazionale	252
6.6.2 Risultati videografici	260
6.6.3 PMIV e PIV vibrazionale	262
6.6.4 Circa la densità di campionamento	267
Conclusioni	270
Appendice A	272
Sistema di elaborazione	272
Appendice B	275
Strumentazione	275
B.1 Amplificatori	275
B.2 Accelerometri Bruel & Kjaer, Tipo 4395	276
B.3 Accelerometri Bruel & Kjaer, Tipo 4384	288
B.4 LMS SCADAS Mobile SCM01	289
B.5 Modulo di Ingresso a 8 canali	291
B.6 Telecamera veloce: Fastcam-pci della Photron	293

Appendice C	295
Alcune Considerazioni Operative per l'Analisi di Segnali monodimensionali	295
C.1 Introduzione	295
C.2 Descrizione dei principali indicatori	299
C.3 Nota Generale.....	299
C.4 Curtosi	300
C.5 IV momento della funzione densità	302
Appendice D	304
Principali irregolarità di funzionamento di un motore a c.i. per compressione	304
D.1 Premessa.....	304
D.2 Analisi del processo di combustione in un motore ad accensione per compressione.....	304
D.3 Irregolarità rilevabili dall'Indicator Diagram.....	307
D.3.1 Anticipo di accensione	308
D.3.2 Ritardo di accensione	309
D.3.3 Afterburning.....	310
D.3.4 Perdita all'iniettore di carburante (<i>LEAKY</i>).....	311
D.3.5 Parziale soffocamento della valvola di alimentazione del carburante	312
Appendice E	314
Descrizione sala prove turbocompressori Di.M.E.	314
E.1 Sala di controllo	314
E.2 Motore	316
E.3 Freno dinamometrico	319
Appendice F	322
Motore monocilindrico ad accensione comandata	322
F.1 Descrizione del motore monocilindrico	322
F.2 Test conditions	323
Ringraziamenti	324
Bibliografia	325

Premessa

L'analisi di Fourier, come strumento base per le operazioni di monitoraggio, risente del forte limite dettato dall'ipotesi di periodicità nonché di linearità su cui poggia tale analisi.

La maggior parte dei fenomeni vibrazionali di origine meccanica, oggetto della presente ricerca, non sono periodici né tantomeno lineari, per cui non è possibile applicare il principio di sovrapposizione degli effetti.

L'artificio numerico che presuppone la lenta variazione dei segnali nel tempo non è applicabile per studi di dettaglio. Infatti tali analisi presuppongono lo studio di fenomeni transienti molto brevi.

Questa ricerca si propone come obiettivo la messa a punto di nuove metodologie di monitoraggio capaci di operare anche nelle condizioni descritte. È per questo che, per lo studio di fenomeni impulsivi, si ricorre alla Trasformata Wavelet. Il suo impiego permette l'identificazione dei transitori molto rapidi, *spikes*, in termini sia di frequenza che di collocazione temporale.

Le metodologie messe a punto nel corso del Dottorato fanno ricorso anche alla Teoria del Caos ed alla determinazione degli esponenti di Lyapunov. Tutto questo, si rende necessario, in quanto, qualsivoglia sistema meccanico presenta, come già detto, nelle sue dinamiche evolutive, aspetti di non linearità.

Ne consegue che su queste basi sono stati implementati sofisticati test diagnostici, che hanno avuto come scopo precipuo quello di evidenziare l'evoluzione dinamica di sistemi rotanti (trasmissione automobilistica) e di agevolare l'identificazione precoce di particolari eventi quali, ad esempio, l'usura e/o rottura di alcuni componenti meccanici o di parti di essi. L'integrazione, quindi, di sofisticate metodologie non lineari e dei relativi algoritmi consente una maggiore affidabilità e sensibilità rispetto a test classici condotti sia sulle trasmissioni meccaniche sia su motori a combustione interna.

Lo scopo, perciò, è quello di procedere alla ispezione degli organi meccanici interessati da usure/danneggiamenti incipienti.

Le metodologie sviluppate nell'ambito della cosiddetta "meccanica fredda" sono poi state, con opportuni accorgimenti, impiegate anche nel settore della "meccanica calda". In particolare per la diagnostica ed il monitoraggio di motori a c.i. è stato fondamentale l'utilizzo di un adeguato filtro Wavelet. L'opportuna rielaborazione dei coefficienti di dettaglio, infatti, ha condotto alla ricostruzione della cosiddetta PMI vibrazionale (PMI_v), che consente un monitoraggio non invasivo del motore (es. candele strumentate).

Introduzione

L'attività di ricerca, oggetto del presente elaborato di tesi, ha avuto come obiettivo principale la messa a punto di nuove metodiche afferenti a teorie non lineari, alla integrazione della Trasformata Wavelet e di alcuni risultati afferenti alla Teoria del Caos, tendenti al monitoraggio e alla diagnostica di organi meccanici complessi, con il preciso scopo di stabilirne le loro condizioni di funzionamento, il loro stato di usura, ed eventuali incipienti danneggiamenti

In linea del tutto generale, le metodiche sviluppate ed applicate durante il Dottorato, sono applicabili a tutti quei campi della meccanica, afferenti e, quindi, classificabili, secondo una vecchia nomenclatura, in “Meccanica fredda” e “Meccanica calda”.

Con riferimento al primo campo di applicazione si è messo a punto un algoritmo sperimentale che, superando i limiti di una metodologia già utilizzata in Elasis¹, consente di rilevare, con significativo anticipo e con la necessaria specificità e sensibilità, incipienti anomalie in occasione di prove di affidabilità (*durability test*) condotte su trasmissioni meccaniche (cambi) per *automotive*.

Tale approccio, consentendo l'eventuale arresto della prova di affidabilità, prima che il difetto propagandosi negli elementi meccanici conduca a completa rottura gli organi interessati, permette di verificare le cause che comportano la loro eventuale difettosità. Ciò consente di intervenire con una più “mirata” revisione progettuale al fine di:

- Ridurre i tempi di “prototipazione”
- Ridurre i costi legati al *test-run*
- Migliorare la specificità e la sensibilità della prova
- Ottimizzare l'interazione tra gli enti di Ricerca, Ingegnerizzazione/Tecnologia e Prototipazione (BPR, Business Process Reengineering).

¹ Centro ricerche Elasis (Gruppo FIAT), di Pomigliano d'Arco (NA).

Le ragioni tecniche che hanno richiesto lo sviluppo di tale algoritmo, risiedono in un reale caso aziendale presentatosi presso il centro suddetto. Durante diverse prove di affidabilità, condotte su prototipi di cambi automobilistici, nei laboratori dell'ente motopropulsori (NVH), si sono verificate rotture improvvise tali da rendere la diagnosi tecnica non certa.

La classica analisi di monitoraggio pone le sue basi teoriche nell'analisi dello spettro di un segnale accelerometrico; infatti è nota la validità di tale tecnica nell'ambito del monitoraggio di cambi automobilistici, nel senso che, monitorando lo spettro del segnale accelerometrico, si analizza l'evoluzione temporale delle frequenze caratteristiche dei suoi componenti e organi meccanici. Eventuali cambiamenti di queste componenti durante il normale funzionamento possono essere sintomo della presenza di un difetto.

Da analisi sperimentali svolte, si è visto, infatti, che un cambio, in normali condizioni di funzionamento (per uno specifico *set-up*), possiede un comportamento vibrazionale caratterizzato da una propria "firma" (*signature*); una variazione significativa di essa, può essere indice dell'insorgenza di anomalie nel sistema.

Per consentire la progettazione e messa a punto dell'algoritmo si è effettuata una campagna di misurazione accelerometrica su di un prototipo di cambio in sviluppo presso Elasis. I risultati sperimentali, sono relativi a dati acquisiti ed elaborati sia con una metodologia già consolidata in Elasis, sia adoperando la nuova metodologia sviluppata durante la presente ricerca.

Tale approccio, per il monitoraggio dello stesso cambio, pone le sue basi in tecniche di analisi afferenti alla teoria delle Wavelet integrata alla Teoria del Caos.

Le ragioni che hanno portato allo sviluppo di questo nuovo approccio risiedono nella coscienza che l'analisi Wavelet, pur garantendo elevata specificità, possiede caratteristiche di sensibilità più spinte. Ciò consente di rilevare la presenza di eventuali anomalie in maniera più repentina ed affidabile.

L'estrazione dei coefficienti Wavelet, in opportuna scala, consente di valutare anche la morfologia e non soltanto la dinamica di ingranamento ottenendo da qui il neologismo da noi coniato di "morfodinamica" vibrazionale.

L'integrazione con specifici indicatori, statistici ed afferenti alla Teoria del Caos, ha reso possibile l'individuazione, attraverso il suo andamento temporale, di un significativo cambiamento della dinamica vibrazionale e della sua morfologia allorquando il fenomeno vibrazionale ha fatto registrare significative irregolarità causate da una incipiente anomalia.

Ovviamente, una ispezione sollecitata da rilevazioni di andamenti anomali delle dinamiche osservate, ha maggiore impatto se non si sono ancora verificate deformazioni plastiche o importanti usure negli organi costituenti il cambio. Una loro presenza, infatti, renderebbe estremamente difficoltoso risalire alle cause generatrici e di conseguenza alla sua riprogettazione e/o modifica di componenti del cambio stesso.

Si sottolinea un ulteriore valore aggiunto della ricerca, in quanto, ci siamo trovati di fronte ad una serie di problemi da risolvere, che saranno puntualmente esposti nei prossimi paragrafi, che hanno reso estremamente complessa la progettazione della metodica nonché la successiva messa a punto del nuovo algoritmo di calcolo.

Da tutto quanto precede, deriva anche il titolo che abbiamo volutamente scelto per caratterizzare il presente lavoro di tesi, che si pone come obiettivo il monitoraggio di sistemi meccanici complessi e l'integrazione di metodiche molto sensibili ma soprattutto affidabili.

Per quanto concerne il campo della cosiddetta "meccanica calda", la nostra ricerca è stata orientata alla caratterizzazione di motori a c.i. (sia ad accensione comandata che per compressione) durante la fase di combustione.

Avvalendoci di comuni strumentazioni, dotate però di elevata sensibilità, nonché di attrezzature di rilevazione e controllo, è stato possibile analizzare il motore nel suo complesso ma anche relativamente ad ogni singolo cilindro, con il preciso scopo di determinare le forze inerziali che si sviluppano, la loro evoluzione temporale e dunque il loro effetto sul motore, nel suo complesso, dal punto di vista vibrazionale.

Infatti si sottolinea l'importanza della preliminare attività tesa a valutare lo stato di funzionamento sia meccanico che termodinamico del "sistema motore" nel suo complesso, al cosiddetto "tempo zero".

La metodologia adottata, in questa seconda parte della ricerca, ha fatto uso di due tipi di segnali: video-grafici (a mezzo telecamera veloce) e accelerometrici.

Le informazioni ottenibili dai segnali accelerometrici e da quelli video-grafici sono complementari (come sarà meglio illustrato nei capitoli della presente tesi).

La metodologia impiegata ha consentito, attraverso l'utilizzo della Trasformata Wavelet, di ricostruire la cosiddetta PMI vibrazionale (PMI_v), partendo da segnali accelerometrici e tachimetrici.

La ricostruzione della anzidetta PMI vibrazionale, morfologicamente è molto simile a quella che viene rilevata utilizzando il trasduttore di pressione (ad es. a mezzo candela strumentata).

Si è avuto modo, inoltre, di verificare, che ciascuna fase di combustione presenta un certo grado di irregolarità.

Le irregolarità di cui sopra non implicano necessariamente un cattivo funzionamento del motore: infatti si tratta di irregolarità tipiche di un motore a c.i. per compressione.

Nonostante tali differenze, si ricorda che i processi di combustione hanno un *imprinting* comune, cioè pur potendo cambiare la singola *shape* (forma), l'*imprinting* rimane.

Un'anomalia se è ripetitiva diventa una caratteristica funzionale del cilindro che può essere migliorata intervenendo su vari fattori quali fasature, controlli sulla pulizia delle valvole, ecc.

Lo studio effettuato si differenzia da un semplice monitoraggio in quanto non sono stati elaborati e confrontati dati motoristici acquisiti in periodi temporalmente differenti, ma è stata effettuata una diagnosi immediata grazie ad acquisizioni di pochi secondi che consentono di evidenziare lo “stato di salute” del motore, sia dal punto di vista meccanico, attraverso le forze inerziali che intervengono nel manovellismo (analisi dei segnali video-grafici), sia attraverso l'analisi accelerometrica inerente la fase specifica di combustione (PMI_v).

Nella presente ricerca nella prima parte sono stati esposti i presupposti matematici e statistici su cui poggiano le suddette teorie. Nella seconda parte sono stati approfonditi e sviluppati alcuni aspetti specifici soprattutto dal punto di vista

metodologico. Nella terza parte sono presentati i risultati ottenuti sia per quanto concerne il monitoraggio di trasmissioni automobilistiche sia per quanto interessa lo studio vibrazionale del funzionamento di un motore a combustione interna. I risultati ottenuti possono dare un'idea di come è possibile sfruttare la potenza di elaborazione offerta dalle suddette metodologie che hanno integrato l'impiego della Trasformata Wavelet e alcuni importanti risultati afferenti alla Teoria del Caos consentendo monitoraggi molto affidabili ma, soprattutto, molto sofisticati e d'avanguardia.

Infatti le suddette metodiche potrebbero, un domani, essere sfruttate per effettuare diagnosi specifiche circa eventuali anomalie riscontrate durante il normale esercizio dell'autoveicolo su cui si potrebbe installare apposito *software* (accelerometro e ruota fonica, attualmente già installati su autovettura di serie).

Sarebbe così possibile avere una *time-history* utile per effettuare sia diagnosi mirate, sia monitoraggi tendenti al miglioramento della combustione (aspetti ecologici) da realizzare attraverso più mirate ingegnerizzazioni del prodotto.

Capitolo 1

La Trasformata Wavelet

1.1 Introduzione

La parola Wavelet, ondina, ha origine nei primi anni ottanta ed è dovuta a Morlet e Grossman che infatti usavano la parola francese *ondelette* - "piccola onda". Poco più tardi la parola venne convertita in inglese traducendo "onda" ("onde" in francese) in "wave" - ottenendo Wavelet.

Lo sviluppo delle Wavelet può essere collegato a diverse correnti di pensiero separate, che hanno origine dal lavoro di Haar all'inizio del ventesimo secolo.

Contributi importanti alla teoria delle Wavelet si possono attribuire alla formulazione, da parte di Goupillaud, Grossman e Morlet di quella che ora è nota come CWT (1982), ai lavori preliminari di Strömberg sulle Wavelet discrete (1983), alle Wavelet ortogonali a supporto compatto di Daubechies (1988), alla struttura a multirisoluzione di Mallat (1989), all'interpretazione in tempo-frequenza della CWT da parte di Delprat (1991), alla Trasformata Wavelet armonica di Newland e molti altri ancora.

La scomposizione Wavelet, di una funzione, è analoga alla scomposizione effettuata a mezzo Fourier. Pertanto il sistema che meglio si presta a questo confronto, sia per evidenziarne le analogie e sia per metterne in evidenza le specifiche differenze, è quello comunemente denominato sistema base di Haar. Esso consente di descrivere i concetti dell'analisi della multirisoluzione e di generalizzarli ad altri tipi di basi Wavelet.

1.2 Considerazioni sulla trasformata trigonometrica discreta di Fourier

Di seguito verranno considerate soltanto funzioni reali definite nell'intervallo $[-\pi, +\pi]$. In ogni caso, una funzione f definita su un intervallo generico $[a, b]$, può sempre essere ricondotta nell'intervallo $[-\pi, +\pi]$.

Poiché le basi funzionali trigonometriche adoperate, seno e coseno, sono definite in tutto R ed hanno periodo 2π , la scomposizione a mezzo trasformata discreta di Fourier (DFT) può essere pensata estesa a tutto R ovvero al solo intervallo $[-\pi, +\pi]$.

Ricordiamo che, una funzione appartiene allo spazio delle funzioni cosiddette quadrato-sommabili $L^2[a, b]$ se

$$\int_a^b f^2(x) dx < \infty$$

ciò significa anche che la funzione è ad energia finita.

In generale, definiamo l'energia associata al segnale $f(x)$ come

$$E_{f(x)} := \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 d(x)$$

purché l'integrale risulti convergente (cioè $E_{f(x)} < \infty$). La definizione di energia, benché meno intuitiva, viene banalmente estesa anche ai segnali a tempo discreto come segue

$$E_x := \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty .$$

Per tutti i segnali *fisici* (cioè effettivamente osservabili), l'integrale (o la sommatoria) che definisce l'energia risulta convergente, poiché ogni segnale proveniente da un sistema fisico reale è ad energia finita.

Per la maggior parte dei problemi pratici è sufficiente che siano soddisfatte le seguenti condizioni, dette "condizioni di Dirichlet":

- ogni funzione f oltre che periodica di periodo T deve essere univoca;
- in ogni periodo T la funzione f deve avere al massimo un numero finito di massimi e minimi ed un numero finito di punti di discontinuità e di punti all'infinito.

La scomposizione a mezzo trasformata di Fourier può essere espressa come una somma di infinite funzioni trascendenti, dilatate/comprese (a frequenza crescente e periodo decrescente) di seno e coseno²

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx)) \quad (1.1)$$

per appropriati valori dei coefficienti $\{a_0, a_1, b_1, \dots\}$.

Pertanto, se la funzione è quadrato-sommabile sarà anche

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - \left(\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx)) \right) \right]^2 dx = 0. \quad (1.2)$$

A tal proposito osserviamo che è possibile che la scomposizione di Fourier differisca dalla (1.2) nel caso f presenti un numero finito di punti di discontinuità all'infinito ed inoltre che la somma in (1.1) è intesa estesa all'infinito, ma una funzione può essere bene approssimata (in L^2) da una somma finita di termini:

² Nel caso che la funzione sia ad energia finita, cioè $f \in L^2[-\pi, \pi]$.

$$\hat{f} = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{j=1}^J (a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx)). \quad (1.3)$$

La rappresentazione in serie di Fourier è estremamente utile in L^2 in quanto, ogni funzione, può essere descritta tramite la composizione di funzioni molto semplici: seno e coseno. Questo è dovuto al fatto che il set di funzioni $\{\sin(j\cdot), \cos(j\cdot), j=1,2,\dots\}$, al pari della funzione costante $\left(\frac{1}{2}a_0\right)$, forma una "base" (nel senso di quanto verrà definito in seguito) nello spazio in cui la funzione è definita: $L^2[-\pi, \pi]$. Nella Fig. 1.1 che segue è ben visibile come l'incremento dell'indice j produce l'effetto da un lato di incrementare la frequenza delle funzioni base e dall'altro di ridurre il periodo.

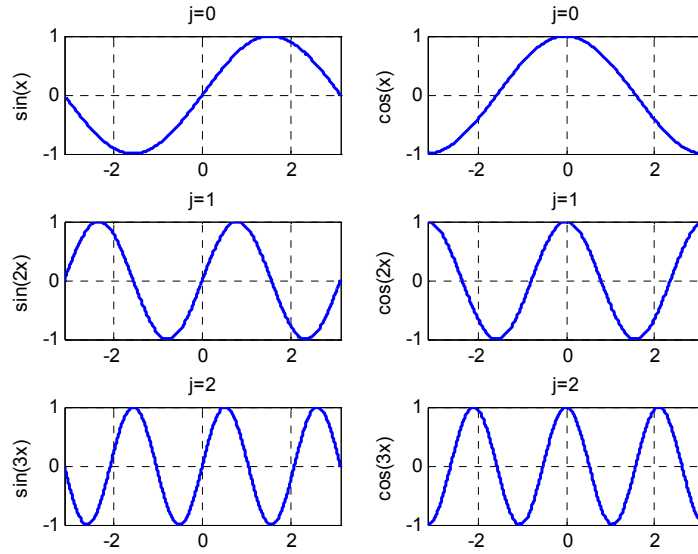


Fig. 1.1 - Andamento delle basi seno e coseno per $j=0, 1, 2$ in $[-\pi, \pi]$

La Fig. 1.2 mostra la capacità di ricostruzione della DFT applicata ad una funzione continua a tratti nell'intervallo $[-\pi, +\pi]$, definita da:

$$f(x) := \begin{cases} x + \pi, & -\pi \leq x \leq -\pi/2 \\ \pi/2, & -\pi/2 < x \leq \pi/2 \\ \pi - x, & \pi/2 < x \leq \pi \end{cases} \quad (1.4)$$

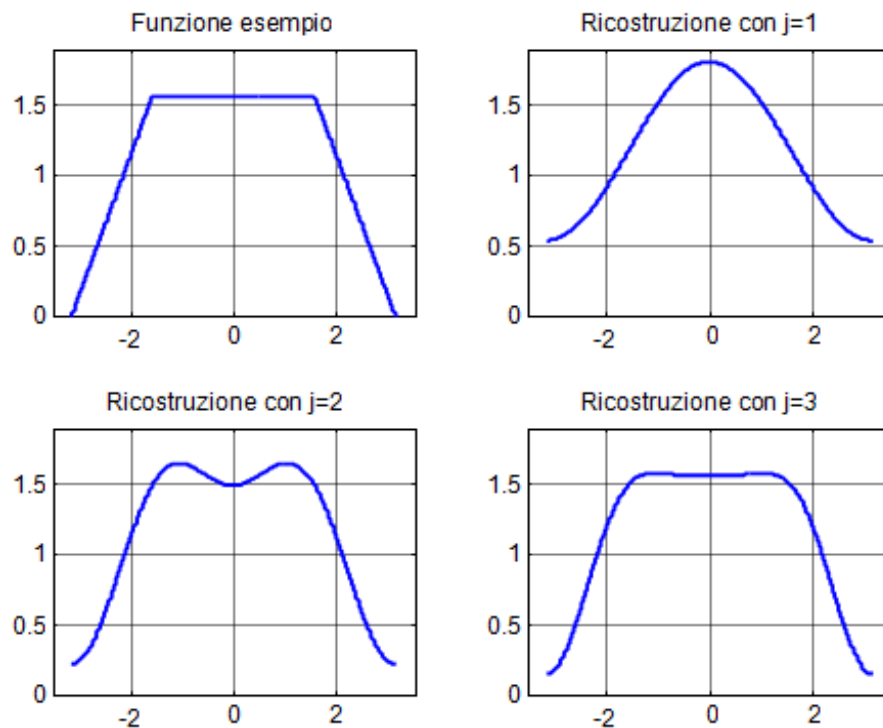


Fig. 1.2 - Un esempio di funzione e sua ricostruzione a mezzo DFT

In Fig. 1.2 è riportato il processo di ricostruzione della (1.4), applicando la (1.3) per $j=1, 2, 3$.

In particolare la Fig. 1.2 mostra la funzione originale e tre ricostruzioni di essa: all'incrementarsi del limite superiore J della somma in (1.3), più termini (armoniche) vengono inclusi nella ricostruzione, così che il risultato della somma fornisce una buona approssimazione della funzione (1.4). Naturalmente, anche questa buona ricostruzione della (1.4) può migliorare se si incrementa J .

Esaminando i coefficienti di Fourier riportati in Tab. 1.1, per prima cosa, notiamo che tutti i coefficienti b_j (corrispondenti alla base seno) sono pari a nullo. La ragione di ciò è che, nell'esempio, la funzione (1.4) è una funzione pari, pertanto il prodotto interno di f con ciascuna delle funzioni dispari (seno) è zero. Continuando l'analisi della Tab. 1.1, notiamo che i coefficienti a_j , relativi al coseno, di pedice pari sono pure uguali a zero (per $j \geq 4$) e che i coefficienti di pedice dispari, dati da $a_j = 2/(j^2\pi)$, decrescono rapidamente appena j cresce.

j	a_j	b_j	j	a_j	b_j
0	$3\pi/4$	-	5	$2/25\pi$	0
1	$2/\pi$	0	6	0	0
2	$-1/\pi$	0	7	$2/49\pi$	0
3	$2/(9\pi)$	0	8	0	0
4	0	0	9	$2/81\pi$	0

Tab. 1.1 - Coefficienti di Fourier per la funzione (1.4)

Ciò sta a significare che molto del contenuto in frequenza, relativo alla funzione di questo esempio, è concentrata a basse frequenze, il che può essere anche visto nella ricostruzione riportata in Fig. 1.2. I coefficienti a_0, a_1, a_2, a_3 , presentano valori relativamente più grandi, cosicché la ricostruzione della funzione (1.4) a mezzo la DFT rappresentata dalla (1.3) al livello $j=3$ appare già molto buona. Incrementando ancora J , l'approssimazione migliorerà sempre, nel senso della (1.2), ma la percentuale di miglioramento diverrà sempre minore.

Notiamo che, pur se la funzione mostrata in Fig. 1.2, presenta delle discontinuità nelle sue derivate, la ricostruzione a mezzo DFT converge su tutti i punti. In pratica questo significa che molte funzioni si possono ricostruire impiegando soltanto un numero limitato di coefficienti (o di componenti armoniche).

I coefficienti a_j e b_j in un certo qual modo è come se "misurassero" il "contenuto in frequenza" della funzione f al livello di "risoluzione" j .

Inoltre, in corrispondenza dei punti di discontinuità, in base anche alla già richiamata condizione di Dirichlet (numero finito di punti di discontinuità), il segnale approssimante presenta delle leggere fluttuazioni (*ripple*) attorno al reale andamento del segnale f .

Per il segnale assegnato, indipendentemente dal numero di armoniche che si usano nella ricostruzione di f , si ottiene comunque un segnale approssimante che ha esattamente un valore massimo (nei pressi della discontinuità) pari a circa $1.09a$, avendo indicato con a l'ampiezza del segnale. Questo fatto è noto come

fenomeno di Gibbs, e la sua presenza fa intuire che la successione di funzioni $\{f_k(x)\}$ non converge uniformemente al segnale $f(x)$.

Ritorniamo al sistema base di Fourier, composto dalle funzioni trascendenti seno e coseno. Esso gode di una importante proprietà: è una base *ortogonale*.

Definizione 1.1 Due funzioni $f_1, f_2 \in L^2[a, b]$ sono dette ortogonali se il loro prodotto scalare è nullo, $(f_1, f_2) = 0$.

La ortogonalità delle basi di Fourier può essere provata attraverso le proprietà presentate dalle funzioni seno e coseno

$$(\sin(mx), \sin(nx)) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n > 0 \end{cases},$$

$$(\cos(mx), \cos(nx)) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n > 0 \\ 2\pi, & m = n = 0 \end{cases},$$

$$(\sin(mx), \cos(nx)) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx = 0, \forall m, n \geq 0.$$

Segue una seconda definizione più generale.

Definizione 1.2: Una sequenza di funzioni $\{f_j\}$ è detta essere ortonormale se le $\{f_j\}$ sono a coppia ortogonali ed inoltre $\|f_j\| = 1, \forall j$ ⁽³⁾.

Abbiamo verificato che il requisito di ortogonalità è oltremodo soddisfatto con le funzioni seno e coseno.

³ La *norma* in L^2 di una funzione è definita essere: $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int f^2(x) dx}$, cioè nello spazio di Hilbert il prodotto scalare genera la funzione norma.

Inoltre, definendo $g_j(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(jx)$, $j = 1, 2, \dots$ e $h_j(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(jx)$, $j = 1, 2, \dots$ nonché la funzione costante $h_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ su $x \in [-\pi, \pi]$, si rende l'insieme delle funzioni $\{h_0, g_1, h_1, \dots\}$ ortonormali.

Tale normalizzazione ci consente di riscrivere la scomposizione (1.1) a mezzo Fourier come segue

$$f(x) = (f, h_0)h_0(x) + \sum_{j=1}^{\infty} ((f, g_j)g_j(x) + (f, h_j)h_j(x)). \quad (1.5)$$

A tal proposito, un rapporto da considerare è quello che lega la determinazione dei coefficienti $\{a_0, a_1, b_1, \dots\}$ della (1.2) con le espressioni riportate nella (1.5).

Infatti, i coefficienti di Fourier possono essere calcolati attraverso il prodotto interno (o prodotto scalare) della funzione f e delle corrispondenti basi funzionali (individuate dalle funzioni seno e coseno)

$$a_j = \frac{1}{\pi} (f, \cos(j \cdot)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(j \cdot) dx, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (1.6)$$

$$b_j = \frac{1}{\pi} (f, \sin(j \cdot)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(j \cdot) dx, \quad j = 1, 2, \dots \quad (1.7)$$

Dimostriamo le (1.6) e (1.7) nel caso più generale esemplificato in Fig. 1.3, in cui

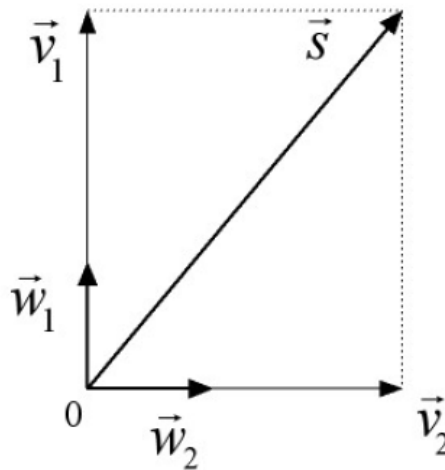


Fig. 1.3 - Scomposizione vettoriale attraverso basi funzionali

è mostrato un vettore \vec{s} che immaginiamo di scomporre nelle sue due componenti ortogonali \vec{v}_1 e \vec{v}_2 tali che $\vec{s} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$. Assegnati due versori ortonormali \vec{w}_1 e \vec{w}_2 si avrà

$$\vec{s} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = c_1 \vec{w}_1 + c_2 \vec{w}_2$$

dove c_1 e c_2 sono due costanti opportune da determinare. Verifichiamo che

$$c_1 = (\vec{s}, \vec{w}_1).$$

Infatti

$$(\vec{s}, \vec{w}_1) = (c_1 \vec{w}_1 + c_2 \vec{w}_2, \vec{w}_1) = c_1 (\vec{w}_1, \vec{w}_1) + c_2 (\vec{w}_2, \vec{w}_1).$$

Stante, per ipotesi, la ortonormalità definita per i versori \vec{w}_1 e \vec{w}_2 , il primo prodotto scalare risulterà uguale all'unità, mentre il secondo si annulla.

La importanza della condizione di ortonormalità è stata bene messa in evidenza dalla precedente semplice dimostrazione vettoriale.

Definizione 1.3: Una sequenza di funzioni $\{f_j\}$ è detta essere un sistema ortonormale completo (**CONS**) se:

- $\{f_j\}$ sono a coppie ortogonali;
- $\|f_j\| = 1, \forall j$;
- la funzione ortogonale a ciascuna $\{f_j\}$ è rappresentata dalla funzione zero.

Quest'ultima proposizione la possiamo anche interpretare dicendo che ogni funzione $f \in L^2(R)$ può essere bene approssimata tramite una combinazione lineare delle sue basi (come lo è di fatto la (1.5)).

Oltre alle funzioni basi di Fourier, esistono anche altre funzioni che possono costituire un sistema ortonormale completo, secondo la Definizione 1.3 alcune forme polinomiali di Legendre ed, in particolare, le Wavelet.

1.3 Funzioni a supporto compatto

Sia $x(t)$ una funzione, se consideriamo l'insieme dei punti in cui la funzione è diversa da zero, si chiama supporto di $x(t)$ e lo indichiamo con $\text{supp}(x)$, la chiusura di tale insieme.

Quindi supporto di una funzione x è la chiusura dell'insieme dei punti dove la funzione è diversa da zero.

Se Ω è un insieme aperto allora il supporto è un insieme che deve essere contenuto in Ω , pertanto dovrà essere anche limitato. Ne consegue che poiché deve essere chiuso e limitato lo chiamiamo compatto. La totalità delle funzioni che presentano questa proprietà costituiscono uno spazio vettoriale. Notiamo che nella fascia che circonda il supporto la funzione è identicamente nulla.

Questo insieme è in realtà un sottospazio vettoriale di C^0 che generalmente è indicato con $C_0^0(\Omega)$ dove l'apice indica che la funzione è continua ed il pedice invece ci ricorda, che, in una fascia della frontiera, la funzione è identicamente

nulla. Tali insiemi si indicano anche con $C_c^0(\Omega)$ dove il pedice ci richiama alla memoria che sono funzioni a supporto compatto.

Infine si dimostra che se u, v sono funzioni a supporto compatto allora anche $u + v$ è una funzione a supporto compatto. Ovviamente u, v avranno i loro rispettivi supporti. Si verifica anche che il supporto di $u + v$ è contenuto in uno dei due supporti.

Analogamente moltiplicando per una costante una funzione a supporto compatto otteniamo ancora una funzione a supporto compatto.

Infine ricordiamo che una funzione continua identicamente nulla nell'area al confine con il suo supporto, conserva la continuità anche delle sue derivate. Inoltre essa ha anche le derivate identicamente nulle.

1.4 Il sistema base di Haar

L'estensione dall'analisi di scomposizione a mezzo Fourier a quella a mezzo Wavelet può avvenire attraverso lo studio della base costituita dalla funzione di Haar. Per la sua semplicità analitica, la funzione di Haar⁴ consente un approccio semplice e chiaro alle basi funzionali costituite dalle Wavelet.

Essa è una funzione a supporto compatto⁵, rappresentata in Fig. 1.4, e definibile come di seguito:

$$\psi(x) := \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0, & \text{negli altri casi} \end{cases} \quad (1.8)$$

⁴ Tale funzione è stata proposta nel 1909, epoca in cui non era ancora stata introdotta l'analisi Wavelet, dal matematico inglese Alfred Haar.

⁵ Ricordiamo che un sottoinsieme di \mathbb{R}^n è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

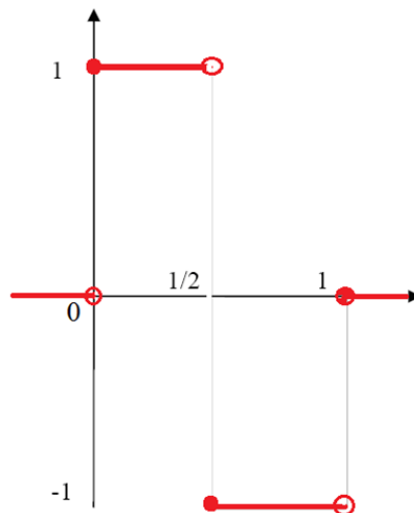


Fig. 1.4 – Funzione Haar

La funzione ψ di Haar definita in precedenza, viene comunemente denominata Wavelet *madre*.

Essa "genera" intere famiglie di Wavelet per mezzo di due operazioni: dilatazione/compressione diadica e traslazione intera. D'ora in poi indicheremo con " j " l'indice di dilatazione/compressione e con " k " l'indice di traslazione.

La funzione (1.8) in forma parametrica, si scrive come

$$\psi_{j,k} = 2^{j/2} \psi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}. \quad (1.9)$$

Da questo punto in poi, indicheremo, per brevità, indifferentemente con il termine Wavelet o semplicemente funzione, la funzione di Haar sopra definita.

Analizziamo più in dettaglio il comportamento della (1.9) al variare di uno degli indici. In particolare nella Tab. 1.2 è rappresentato il comportamento della Wavelet al variare del parametro k , fissato $j=0$. Notiamo che se k si incrementa, la Wavelet trasla verso destra, viceversa al decrescere di k la funzione trasla verso sinistra. In tale spostamento, la funzione rimane costante per quanto riguarda la

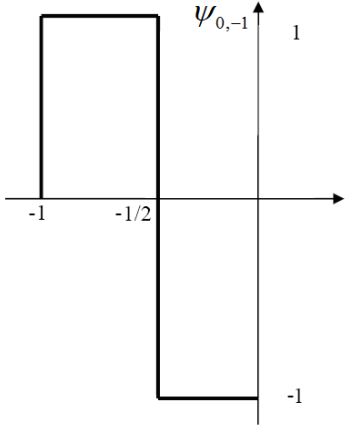
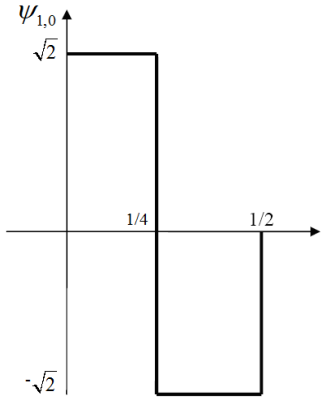
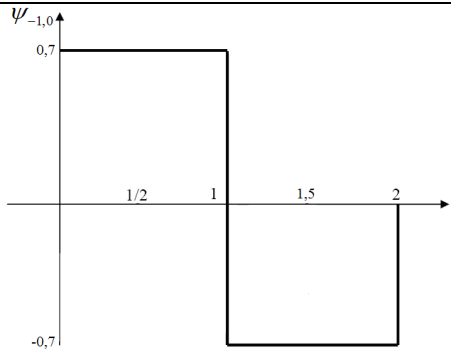
forma. L'ampiezza del supporto⁶ è pari ad 1. Il supporto invece varia passando da $[0, 1)$ per $k = 0$, a $[1, 2)$ per $k = 1$ e $[-1, 0)$ per $k = -1$.

Il comportamento della funzione è quello di una compressione o di un allungamento se, questa volta, proviamo a mantenere costante il parametro $k = 0$ e poniamo $j = 1$ ovvero $j = -1$. In questi ultimi casi l'ampiezza del supporto passa da 0.5 per $j = 1$ a 2 per $j = -1$. Mentre il supporto varia da $[0, 0.5)$ a $[0, 2)$ rispettivamente per $j = 1$ e $j = -1$. Pertanto una combinazione dei due parametri j e k comporterà sia traslazioni che compressioni o allungamenti della funzione.

Tali proprietà risulteranno molto utili allorquando si tratterà di utilizzare tale funzione come base per scomporre una qualsiasi altra funzione.

Funzione	Supporto	Amp. Supp.	Shape
$\psi_{0,0}(x) = \psi(x)$	$[0, 1)$	1	
$\psi_{0,1}(x) = \psi(x-1)$	$[1, 2)$	1	

⁶ Ricordiamo che supporto di una funzione definita in $X \subseteq \mathbb{R}$ è l'intervallo in cui la funzione è diversa da zero: $\text{supp } f(x) := \{x \in X : f(x) \neq 0\}$.

$\psi_{0,-1}(x) = \psi(x+1)$	$[-1, 0)$	1	
$\psi_{1,0}(x) = \sqrt{2}\psi(2x)$	$[0, 0.5)$	0.5	
$\psi_{-1,0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi\left(\frac{x}{2}\right)$	$[0, 2)$	2	

Tab. 1.2 – Proprietà della funzione di Haar

Passiamo a dimostrare il seguente importante Teorema

Teorema 1.1: L'insieme $\{ \psi_{j,k}, j,k \in \mathbb{Z} \}$ costituisce un sistema ortonormale completo in $L^2(\mathbb{R})$.

Per stabilire il risultato del teorema, è necessario mostrare due condizioni:

1. l'insieme $\{ \psi_{j,k}, j,k \in \mathbb{Z} \}$ è ortonormale;

2. ogni funzione $f \in L^2(R)$ può essere approssimata arbitrariamente bene tramite una combinazione lineare delle $\{ \psi_{j,k}, j, k \in Z \}$.

Per prima cosa, notiamo che ogni funzione Haar soddisfa la condizione

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{j,k}(x) dx = 0, \quad \forall j, k \in Z.$$

Per dimostrare la condizione (1), notiamo che il supporto della funzione Wavelet $\psi_{j,k}(x)$ è dato da

$$\text{supp } \psi_{j,k}(x) = [k2^{-j}, (k+1)2^{-j})$$

e che l'ampiezza dell'intervallo è pari a 2^{-j} .

Dall'analisi anche della Tab. 1.2, notiamo che due Wavelets aventi lo stesso indice j ma differenti k non avranno mai un supporto che si sovrappone e perciò sono ortogonali. Se due Wavelets hanno differenti indici di dilatazione, diciamo $j' < j$ ma uguali k , allora $\text{supp } \psi_{j,k}$ individua una regione in cui una delle due funzioni Wavelet è costante, così esse sono ancora ortogonali. Dal momento che $\|\psi_{j,k}\| = 1, \forall j, k \in Z$, l'insieme è anche ortonormale.

Per dimostrare la condizione (2), per prima cosa osserviamo che ogni funzione in $L^2(R)$ può essere approssimata per mezzo di una funzione avente il supporto compatto.

Poiché

$$\int_{-2^{-j_1}}^{2^{-j_1}} f^2(x) dx \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx$$

per $J_1 \rightarrow \infty$, possiamo approssimare f arbitrariamente bene in $L^2(R)$ scegliendo un intero J_1 opportunamente grande; la prima approssimazione di f è così legata alla restrizione di f sull'intervallo $[-2^{J_1}, 2^{J_1})$, che può essere denotata come $f|_{[-2^{J_1}, 2^{J_1})}$. La prima approssimazione può essere ulteriormente approssimata da una funzione che è continua a tratti su tutti gli intervalli del tipo $[l2^{J_0}, (l+1)2^{-J_0})$ dove l'intero J_0 è scelto grande tanto da rendere l'approssimazione buona quanto si vuole.

Questa ricostruzione approssimata di una funzione per mezzo di una funzione continua a tratti è illustrata nella Fig. 1.5. Poiché queste ricostruzioni approssimate possono essere fatte per ogni funzione in $L^2(R)$, restringiamo l'attenzione su tali funzioni definite costanti a tratti con supporto compatto.

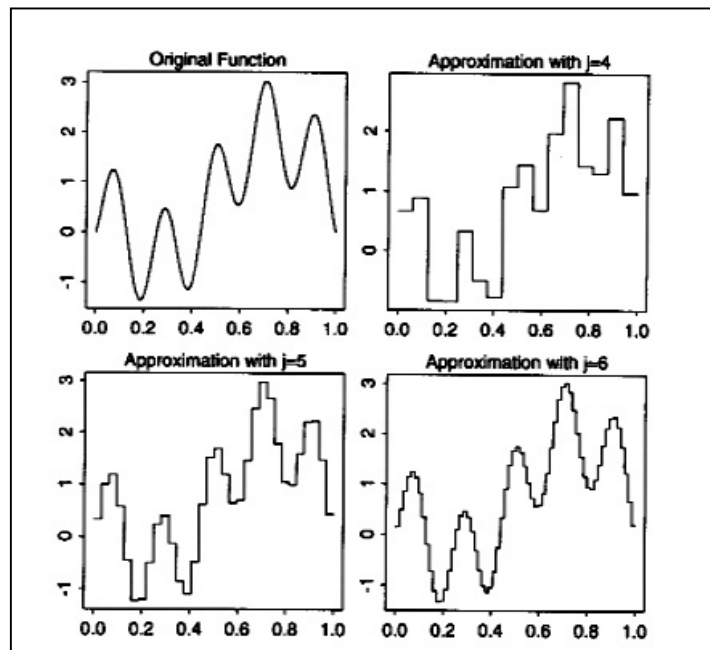


Fig. 1.5 - Ricostruzione approssimata di una funzione per mezzo di una funzione continua a tratti

Omettiamo una dimostrazione rigorosa ed analitica del Teorema, in quanto ciò esula dagli obiettivi di questa relazione.

Sia f^{J_0} una funzione continua a tratti su intervalli di lunghezza 2^{-J_0} . Allora $f_l^{J_0}$ rappresenterà il valore della funzione nell'intervallo $[l2^{-J_0}, (l+1)2^{-J_0}]$

$$f^{J_0}(x) = f_l^{J_0}, \forall x \in [l2^{-J_0}, (l+1)2^{-J_0}].$$

È possibile scrivere f^{J_0} come somma di due funzioni

$$f^{J_0} = f^{J_0-1} + g^{J_0-1} \quad (1.10)$$

dove f^{J_0-1} rappresenta una approssimazione di f^{J_0} nell'intervallo di lunghezza $2^{-(J_0-1)}$, due volte più grande del primo 2^{-J_0} .

La funzione g^{J_0-1} , definita di *dettaglio*, rappresenta quella parte che deve essere aggiunta a quella di approssimazione f^{J_0-1} per ottenere un affinamento della f^{J_0} . La scomposizione rappresentata dalla (1.10) è riportata nella Fig. 1.6.

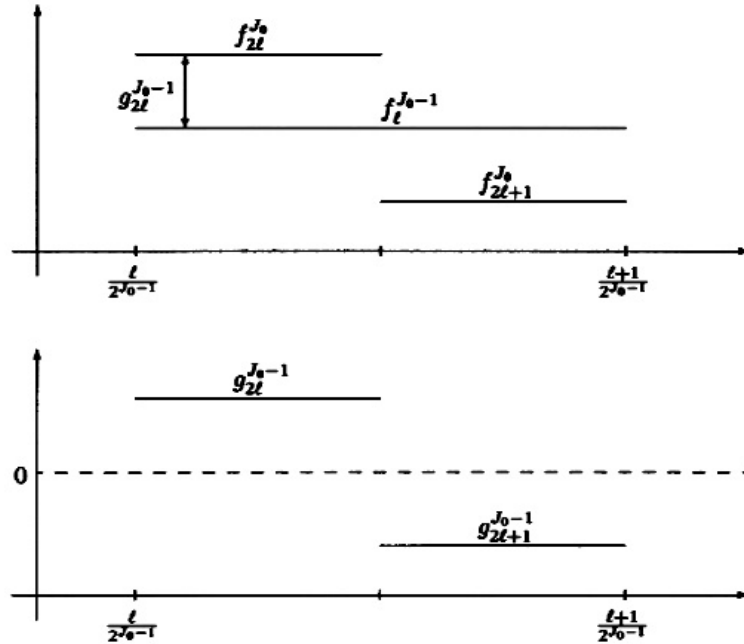


Fig. 1.6 – Scomposizione rappresentata dalla (1.10)

La funzione di approssimazione f^{J_0-1} può a sua volta essere scomposta, ottenendo

$$f^{J_0} = f^{J_0-1} + g^{J_0-1} = f^{J_0-2} + g^{J_0-2} + g^{J_0-1}.$$

Notiamo che f^{J_0-2} ha lo stesso supporto di f^{J_0} ma essa è continua a tratti su un intervallo più ampio: $[l2^{-(j_0-2)}, (l+1)2^{-(j_0-2)}]$.

Un modo di scrivere la (1.10) in forma generalizzata è il seguente

$$f^{J_0} = f^{J_1} + \sum_{j=-J_1}^{J_0-1} \sum_l d_{j,k} \psi_{j,k} \quad (1.11)$$

dove

$$d_{j,k} = (f^{J_0}, \psi_{j,k}) = 2^{j/2} \int_{k2^j}^{(k+1)2^j} f^{J_0}(x) \psi(2^j x - k) dx. \quad (1.12)$$

La posizione (1.12) tanto può essere scritta in quanto la funzione $\psi(x)$ è una base ortonormale. La (1.11) dimostra la condizione (2) e pertanto il teorema.

Inoltre la (1.11) mette in evidenza una importante proprietà delle Wavelet, vale a dire l'analisi della multirisoluzione, discussa nel prossimo paragrafo.

1.5 Analisi della multirisoluzione

Consideriamo il rapporto: $87/7$. Esso, in notazione decimale, può essere riscritto come: 12.4285714...

Possiamo anche rappresentare il valore della frazione $87/7$ come: 10; 12; 12.4; 12.42..., dipendendo la scelta soltanto dal livello di accuratezza desiderato. La risoluzione tra 10 e 12 presenta una differenza di 2; tra 12 e 12.4 la differenza è di 0.2; tra 12.40 e 12.42 essa scende a 0.02 e così di seguito. Al pari della

Wavelet in cui il fattore di risoluzione varia di un fattore 2, nella rappresentazione della frazione $87/7$ la risoluzione varia di un fattore 10. Più si scende nel livello di dettaglio e minore è l'approssimazione. Viceversa se volessimo approssimare la frazione $87/7$ di un fattore 100, perderemmo di vista il valore reale della frazione. Pertanto possiamo scrivere il valore della frazione $87/7$ come $87/7 = 12 + \varepsilon$ (avendo indicato con ε l'errore di approssimazione) o con notazione simbolica afferente alla potenza in base 10

$$87/7 = 12 \times 10^0 + 4 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2} + 8 \times 10^{-3} + 5 \times 10^{-4} + \dots$$

ovvero, con ovvio significato dei simboli, come

$$P^3 \frac{87}{7} = P^0 \frac{87}{7} + P^{-1} \frac{87}{7} + P^{-2} \frac{87}{7} + P^{-3} \frac{87}{7} + \dots \quad (1.13)$$

cioè

$$P^3 \frac{87}{7} = 12 + 0.4 + 0.02 + 0.008 \Rightarrow P^3 = 12.428.$$

Così come il nostro sistema di numerazione decimale permette di approssimare qualsiasi numero senza ridondanza e con la precisione desiderata, così l'analisi in multirisoluzione può fare lo stesso per un qualsiasi segnale, purché siano soddisfatte alcune condizioni.

Per rendere questo argomento più rigoroso, definiamo una funzione nello spazio V_j , $j \in \mathbb{Z}$, tale che

$$V_j = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : f \text{ è continua a tratti su } [k^{2^{-j}}, (k+1)2^{-j}], \quad k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Nella dimostrazione del Teorema 1.1, si è visto che ogni funzione $f \in L^2(R)$ può essere approssimata da una funzione continua a tratti (Haar) e che, come j cresce, migliora la sua approssimazione in L^2 .

Questa approssimazione può essere scritta, secondo la (1.10), come somma della approssimazione *grossolana* f^{j-1} ed una di *dettaglio* g^{j-1} . All'incrementarsi dell'indice j , la corrispondente ricostruzione passa da grossolana a fine. Inoltre, ciascuna funzione di dettaglio, g^j , può essere scritta come una combinazione lineare delle corrispondenti funzioni $\psi_{j,k}$.

Al pari della (1.13), usando la notazione $P^j f$ per denotare la "proiezione" di una funzione f sullo spazio V_j si ha:

$$P^j f = P^{j-1} + g^{j-1}. \quad (1.14)$$

La funzione di dettaglio g^{j-1} rappresenta il "residuo" (o errore ε) tra due approssimazioni successive. Esso può essere scritto in termini di wavelet (dilate e traslate) ponendo

$$P^j f = P^{j-1} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j-1,k} \rangle \psi_{j-1,k}. \quad (1.15)$$

dove $\langle \cdot \rangle$ rappresenta il prodotto scalare tra funzioni discrete.

La sequenza degli spazi $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ rappresenta un insieme di sottospazi di risoluzione crescente (al crescere di j). Ciascun sottospazio V_j consiste di funzioni che sono continue a tratti sugli intervalli di lunghezza esattamente doppia di quelli di V_{j-1} (e metà della lunghezza per V_{j+1}).

Questa sequenza di sottospazi possiede le seguenti proprietà:

1. $\dots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \dots$
2. $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}, \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \overline{V_j} = L^2(R)$

3. $f \in V_j \Leftrightarrow f(2 \cdot) \in V_{j+1}$
4. $f \in V_0 \Rightarrow f(\cdot - k) \in V_0, \forall k \in \mathbb{Z}.$

In particolare, la terza proprietà mette in evidenza che ciascuno spazio V_j è una versione "scalata" dello spazio originale V_0 .

Il concetto dell'analisi in multirisoluzione ci porta ad affermare che allorquando ci sia una sequenza di spazi V_j che soddisfa le quattro proprietà precedenti allora

5. Esiste una funzione $\varphi \in V_0$ tale che l'insieme

$$\{\varphi_{0,k} = \varphi(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$$

costituisce una base ortonormale per V_0 . Pertanto esiste una funzione φ tale che la (1.12) è vera. Nel caso della funzione di Haar considerata è chiaro che si può scegliere per φ

$$\varphi(x) = I_{[0,1)}(x) \tag{1.16}$$

dove $I_A(\cdot)$ è la funzione indicatore dell'insieme A. La funzione φ è detta funzione di *scaling* poiché essa dilata e trasla le basi ortonormali per tutti gli spazi V_j , che sono semplicemente versioni scalate di V_0 .

Poiché faremo largo uso di questa proprietà nel seguito, occorre una più rigorosa definizione

Definizione 1.4: Sottospazi chiusi $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ che soddisfano le proprietà (1)–(5) sopra richiamate formano una analisi multirisoluzione (**MRA**) in $L^2(\mathbb{R})$.

Se una funzione φ può essere usata per formare spazi

$$V_j = \text{span}\{\varphi_{j,k}, k \in \mathbb{Z}\}$$

tale che $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ costituisce una MRA, allora la funzione (scaling) φ è detta generare una analisi multirisoluzione.

1.6 La rappresentazione Wavelet

Nell'esempio della funzione di Haar, è chiaro che la sequenza dei sottospazi $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ generata dalla funzione φ definita in (1.16) soddisfa le proprietà (1)–(5) riportate in precedenza.

La funzione Haar definita in (1.16), al pari della ψ , può essere espressa in forma parametrica come

$$\varphi_{j,k} = 2^{j/2} \varphi(2^j x - k), k \in \mathbb{Z}. \quad (1.17)$$

Essa definisce uno spazio V_j , e, a sua volta, risulta essere uno span^7 , con l'insieme di funzioni $\{\varphi_{j,k}, k \in \mathbb{Z}\}$, dello spazio V_j .

Così come fatto per la funzione ψ , notiamo che la (1.18), rappresentata in Fig. 1.7, è definita come segue

$$\varphi_{j,k}(x) := \begin{cases} 1, & x \in [0, 1) \\ 0, & x \notin [0, 1) \end{cases}. \quad (1.18)$$

⁷ Se ogni vettore in uno spazio vettoriale V può essere scritto come combinazione lineare di un insieme di vettori $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, allora si dirà che questi vettori costituiscono uno span di V . Inoltre se l'insieme di vettori $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ oltre ad essere uno span di V , risultano anche linearmente indipendenti, allora costituiranno una base di V .

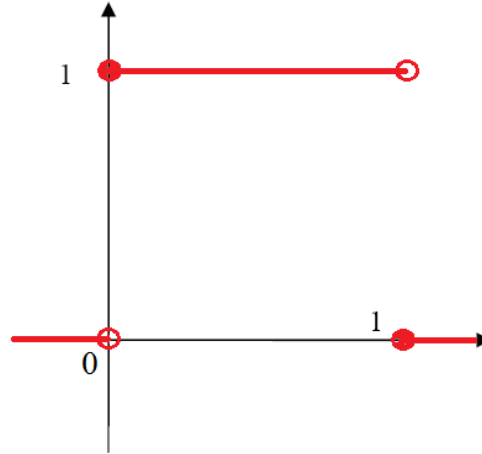


Fig. 1.7 - La funzione Haar di scala

Il supporto di φ è dato da

$$\text{supp } \varphi_{j,k} = [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}),$$

mentre la sua ampiezza è data da

$$\text{amp supp } \varphi_{j,k} = 2^{-j}.$$

Nella Tab. 1.3 che segue sono riepilogate le caratteristiche delle due funzioni: ψ, φ .

$\psi(x) := \begin{cases} +1, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0, & x \in [0,1) \end{cases}$	$\varphi(x) := \begin{cases} 1, & x \in [0,1) \\ 0, & x \notin [0,1) \end{cases}$
$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} + (2^j x - k), \quad k \in \mathbb{Z}$	$\varphi_{j,k} = 2^{j/2} \varphi(2^j x - k), \quad k \in \mathbb{Z}$
$\text{supp } \psi_{j,k}(x) = [k2^{-j}, (k+1)2^{-j})$	$\text{supp } \varphi_{j,k}(x) = [k2^{-j}, (k+1)2^{-j})$
$\text{amp supp } \psi_{j,k} = 2^{-j}$	$\text{amp supp } \varphi_{j,k} = 2^{-j}$

Tab. 1.3 - Caratteristiche funzioni ψ, φ

Per completezza si riporta di seguito (Fig. 1.8 e Tab. 1.4) il comportamento di $\varphi_{j,k}$ al variare degli indici j,k .

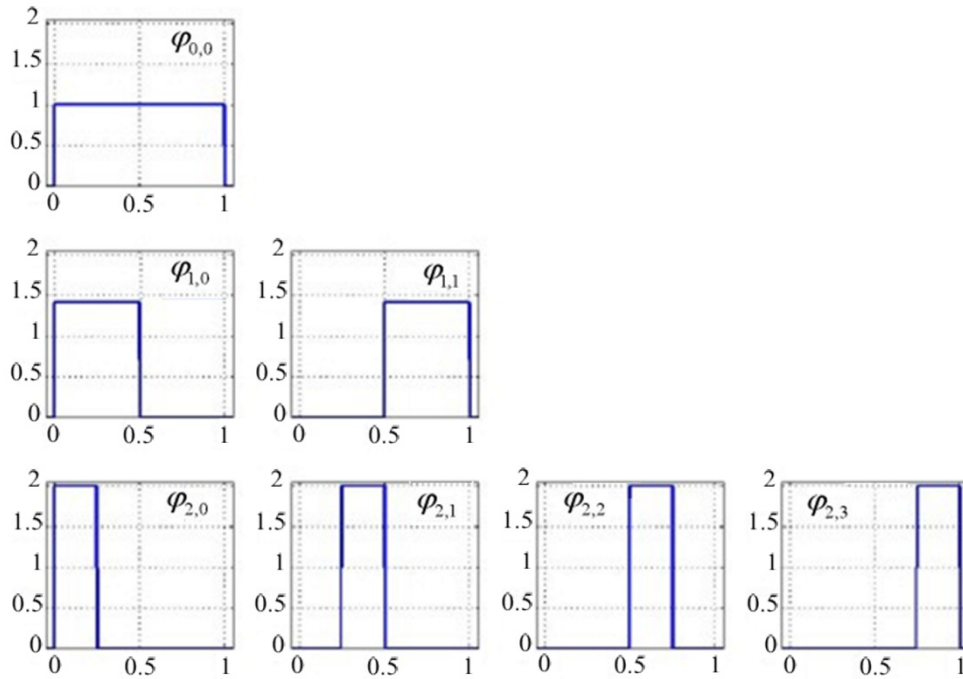


Fig. 1.8 - Proprietà della funzione di Haar

Funzione	Supporto	Ampiezza Supporto	Ampiezza Funzione
$\varphi_{0,0}(x)$	$[0,1)$	1	1
$\varphi_{1,0}(x)$	$[0,0.5)$	0.5	$\sqrt{2}$
$\varphi_{1,1}(x)$	$[0.5,1)$	0.5	$\sqrt{2}$
$\varphi_{2,0}(x)$	$[0,0.25)$	0.25	2
$\varphi_{2,1}(x)$	$[0.25,0.5)$	0.25	2
$\varphi_{2,2}(x)$	$[0.5,0.75)$	0.25	2
$\varphi_{2,3}(x)$	$[0.75,1)$	0.25	2

Tab. 1.4

Come è facilmente rilevabile la funzione φ "copre" lo spazio relativo a metà supporto della funzione ψ , dove essa è definita non negativa, più lo spazio di sinistra o di destra a seconda del valore assunto dall'indice j .

Si è già stabilito che le funzioni $\psi_{j,k}$ sono mutuamente ortogonali. Così che è possibile definire uno "spazio di dettaglio" per il quale l'insieme delle Wavelet con singolo indice di dilatazione formi una base ortonormale

$$W_j = \text{span}\{\psi_{j,k}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Si può dimostrare che la funzione di scaling e la Wavelet (dilatazioni e traslazioni) sono ortogonali.

Possiamo, pertanto, ritenere che la proiezione di una funzione in $L^2(\mathbb{R})$, su uno spazio vettoriale V_j , può essere fatta semplicemente utilizzando la funzione di scaling definita in precedenza, opportunamente scalata e traslata, cioè

$$P^j f = \sum_k c_{j,k} \varphi_{j,k}. \quad (1.19)$$

Poiché, l'insieme $\{\varphi_{j,k}, k \in \mathbb{Z}\}$, è una base ortonormale per V_j , i coefficienti della funzione di scaling nella (1.19) possono essere calcolati tramite la

$$c_{j,k} = (f, \varphi_{j,k}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi_{j,k}(x) dx. \quad (1.20)$$

Infine, la relazione base, che consente di integrare i concetti su esposti in una unica relazione sia vettoriale che funzionale, è la seguente

$$f(x) = \sum_k c_{j_0,k} \varphi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0}^{j_1} \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(x), \{k \in \mathbb{Z}, j_0 = 0, j_1 = \text{int}(\log_2 N)\} \quad (1.21)$$

nella quale N rappresenta il numero di punti costituenti la sequenza del segnale.

1.7 Obiettivi dell'analisi multirisoluzione

Obiettivo delle Wavelet e dell'analisi multirisoluzione nel campo dell'analisi dei segnali è quello di ottenere una rappresentazione di una funzione (segnale) in una sintesi che comunque preservi le sue caratteristiche salienti, utilizzando un insieme limitato di coefficienti.

Una Wavelet (la quale opportunamente compressa/dilatata, forma la base per spazi in cui il fine è lo studio del *dettaglio* del segnale) deve essere localizzata nel tempo, nel senso che $\psi(x) \rightarrow 0$ rapidamente appena $|x|$ cresce. La Wavelet dovrebbe anche oscillare intorno allo zero in modo tale che $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) d(x) = 0$ ed i primi m momenti siano anche pari a zero,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k \psi(x) d(x) = 0, k = 1, \dots, m-1.$$

La proprietà oscillatoria rende la funzione un'onda, ma poiché è localizzata, essa diviene una Wavelet (piccola onda limitata nel tempo).

Così una Wavelet madre ψ , quando è compressa, è molto più capace ad individuare dettagli "fini" del segnale. Si noti che poiché $\psi_{j,k}(x)$ è localizzata intorno al punto $x = 2^{-j}k$ ne consegue che il coefficiente Wavelet $d_{j,k} = (f, \psi_{j,k})$ misura l'ammontare della fluttuazione intorno al punto $x = 2^{-j}k$, con una frequenza determinata dall'indice j . In una applicazione di *signal processing*, è tipico partire da un basso livello di approssimazione per poi raggiungere un alto livello di scomposizione della Wavelet.

Un primo approccio alla Trasformata Wavelet può essere fatto considerando un vettore di soli quattro elementi in modo da focalizzare l'attenzione su quelle che sono le funzioni $\phi_{j,k}$ ⁸ e $\psi_{j,k}$.

Consideriamo la funzione

$$f(x) = [-5, -1, 1, 11]$$

mostrata in Fig. 1.9.

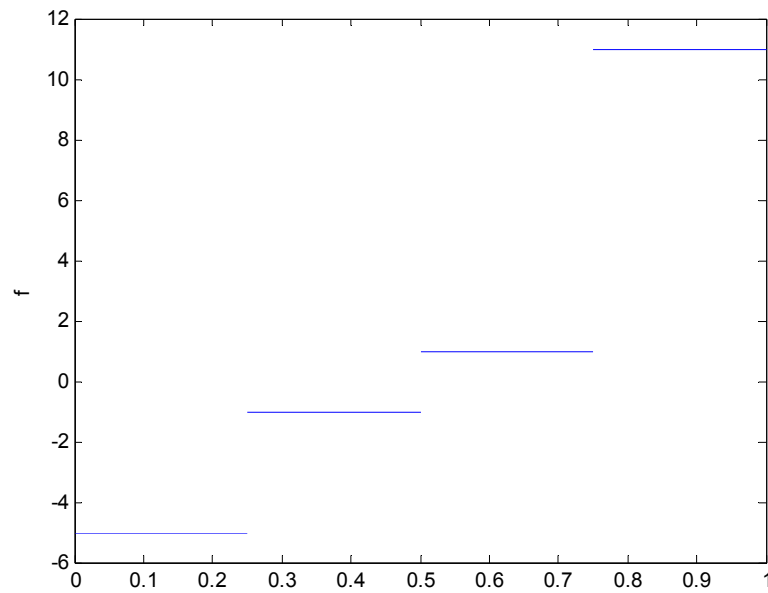


Fig. 1.9

Ricordando che le funzioni $\phi_{j,k}$ fissato j e le $\psi_{j,k}$ sono tutte linearmente indipendenti, possiamo ricostruire il segnale prelevando solo quattro di queste funzioni, sicuri che rappresentano una base.

Scegliamo una primo *set* di basi funzionali:

$$f(x) = c_1\phi_{00} + c_2\psi_{00} + c_3\psi_{10} + c_4\psi_{11}$$

si ottiene banalmente la base B in forma matriciale

⁸ Per ragioni tipografiche, conveniamo di indicare da ora in poi la funzione di scaling con il simbolo ϕ

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Andiamo quindi alla ricerca di quelli che sono i coefficienti della combinazione lineare scritta prima, con un'operazione matriciale

$$B^{-1} \times f(x)' = 1.5 \quad -4.5 \quad -2 \quad -5,$$

avendo indicato con l'apice il simbolo di trasposizione. Osserviamo che questa non è l'unica base di 4 vettori linearmente indipendenti che possiamo utilizzare per ricostruire il segnale origine.

Un'altra base potrebbe essere, ad esempio

$$f(x) = c_1 \phi_{10} + c_2 \phi_{11} + c_3 \psi_{10} + c_4 \psi_{11}$$

anche in questo caso la base V in forma matriciale è data da

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

I nuovi coefficienti della combinazione lineare sono dati da

$$V^{-1} \times f(x)' = -3 \quad 6 \quad -2 \quad -5.$$

Infine possiamo prendere in considerazione la cosiddetta base banale o canonica

$$f(x) = c_1\phi_{20} + c_2\phi_{21} + c_3\phi_{22} + c_4\phi_{23}$$

dove la forma matriciale della base A è una matrice diagonale unitaria

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

I coefficienti banalmente coincidono con gli elementi del vettore origine

$$A^{-1} \times f(x)' = -5 \quad -1 \quad 1 \quad 11.$$

Proviamo adesso a cercare quelle che sono le relazioni che possono leggere i coefficienti delle combinazioni lineari viste, in modo da evidenziare quelle che sono le caratteristiche tra le funzioni

$$\begin{aligned} & -5(\phi_{20}) \quad -1(\phi_{21}) \quad +1(\phi_{22}) \quad +11(\phi_{23}) \\ & -3(\phi_{10}) \quad +6(\phi_{11}) \quad -2(\psi_{10}) \quad -5(\psi_{11}). \\ & 1.5(\phi_{00}) - 4.5(\psi_{00}) \quad -2(\psi_{10}) \quad -5(\psi_{11}) \end{aligned}$$

Notiamo che i coefficienti evidenziati in rosso sono legati tra di loro, e più precisamente uno è media degli altri due

$$\frac{-5-1}{2} = -3$$

Di conseguenza possiamo dire che anche le funzioni sono correlate. In particolare la ϕ_{10} genera la ϕ_{20} e la ϕ_{21} . Questa caratteristica non è casuale, la ritroviamo prendendo in considerazione anche altri coefficienti

$$\begin{array}{cccc}
-5(\phi_{20}) & -1(\phi_{21}) & +1(\phi_{22}) & +11(\phi_{23}) \\
-3(\phi_{10}) & +6(\phi_{11}) & -2(\psi_{10}) & -5(\psi_{11}) \\
1.5(\phi_{00}) - 4.5(\psi_{00}) & -2(\psi_{10}) & -5(\psi_{11}) &
\end{array}$$

$$\frac{1+11}{2} = 6.$$

Anche qui trovata la relazione tra i coefficienti possiamo dedurre che la ϕ_{11} genera la ϕ_{22} e la ϕ_{23} .

A sua volta la ϕ_{00} genererà la ϕ_{10} e la ϕ_{11} , infatti

$$\begin{array}{cccc}
-5(\phi_{20}) & -1(\phi_{21}) & +1(\phi_{22}) & +11(\phi_{23}) \\
-3(\phi_{10}) & +6(\phi_{11}) & -2(\psi_{10}) & -5(\psi_{11}) \\
1.5(\phi_{00}) - 4.5(\psi_{00}) & -2(\psi_{10}) & -5(\psi_{11}) &
\end{array}$$

$$\frac{-3+6}{2} = 1.5.$$

Rappresentiamo quanto appena dedotto con uno schema piramidale (Fig. 1.10).

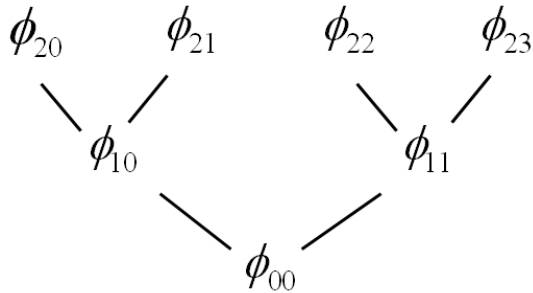


Fig. 1.10 - Struttura piramidale della funzione ϕ

Andiamo alla ricerca delle relazioni che intercorrono tra le $\psi_{j,k}$ e le $\phi_{j,k}$ sempre attraverso i coefficienti. Il legame che si osserva è la differenza dei coefficienti:

$$\begin{array}{cccc}
-5(\phi_{20}) & -1(\phi_{21}) & +1(\phi_{22}) & +11(\phi_{23}) \\
-3(\phi_{10}) & +6(\phi_{11}) & -2(\psi_{10}) & -5(\psi_{11}) \\
1.5(\phi_{00}) - 4.5(\psi_{00}) & -2(\psi_{10}) & -5(\psi_{11}) &
\end{array}$$

$$-5 - (-3) = -2$$

Di conseguenza possiamo affermare che anche le funzioni ϕ_{10} e ϕ_{20} sono correlate alla ψ_{10} . Cambiando i coefficienti ritroviamo la medesima proprietà per altre funzioni:

$$\begin{array}{cccc}
-5(\phi_{20}) & -1(\phi_{21}) & +1(\phi_{22}) & +11(\phi_{23}) \\
-3(\phi_{10}) & +6(\phi_{11}) & -2(\psi_{10}) & -5(\psi_{11}) \\
1.5(\phi_{00}) - 4.5(\psi_{00}) & -2(\psi_{10}) & -5(\psi_{11}) &
\end{array}$$

$$1 - 6 = -5$$

In particolare la ψ_{11} è generata dalle ϕ_{11} e ϕ_{22} e allo stesso modo notiamo che la ψ_{00} è generata dalle ϕ_{00} e ϕ_{10}

$$\begin{array}{cccc}
-5(\phi_{20}) & -1(\phi_{21}) & +1(\phi_{22}) & +11(\phi_{23}) \\
-3(\phi_{10}) & +6(\phi_{11}) & -2(\psi_{10}) & -5(\psi_{11}) \\
1.5(\phi_{00}) - 4.5(\psi_{00}) & -2(\psi_{10}) & -5(\psi_{11}) &
\end{array}$$

$$-3 - 1.5 = -4.5.$$

Concludendo, le relazioni viste tra le $\psi_{j,k}$ e le $\phi_{j,k}$ mostrano che un qualunque segnale può essere completamente ricostruito sommando una funzione di approssimazione al livello j e tutte le funzioni di dettaglio fino al j massimo. Quanto detto è evidente dalla Fig. 1.11.

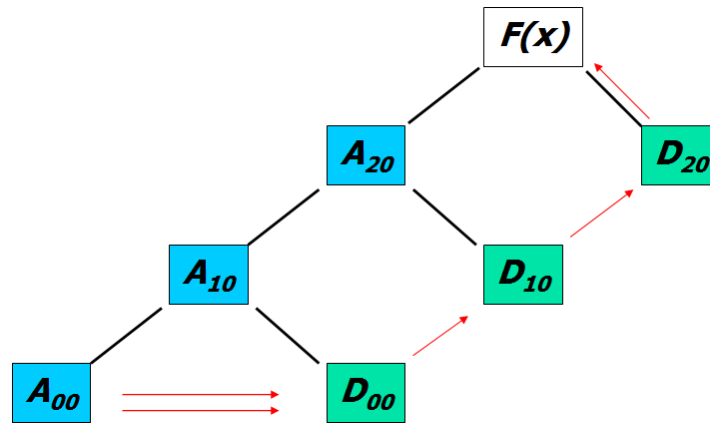


Fig. 1.11 - Modello di ricostruzione funzionale

1.8 Smoother Wavelet Bases

Fino ad ora si è trattato soltanto della funzione Wavelet Haar. L'estensione ad altre basi Wavelet consiste principalmente nel fatto di cambiare le funzioni ϕ e ψ , fermo restando i principi fondamentali esposti in precedenza.

Negli ultimi anni sono state sviluppate molte famiglie di basi ortonormali: Stromberg (1982), Meyer (1985), Battle (1987) e Lemarié (1988).

Ingrid Daubechies introdusse nel 1988 una nuova famiglia di Wavelet che non soltanto sono ortonormali, ma hanno anche il supporto compatto, cioè si annullano al di fuori del dominio di definizione. Questa nuova famiglia determinò un profondo impatto e queste Wavelet sono impiegate intensivamente nella pratica del processing dei segnali. Alcuni componenti di questa famiglia sono rappresentati nella Fig. 1.12

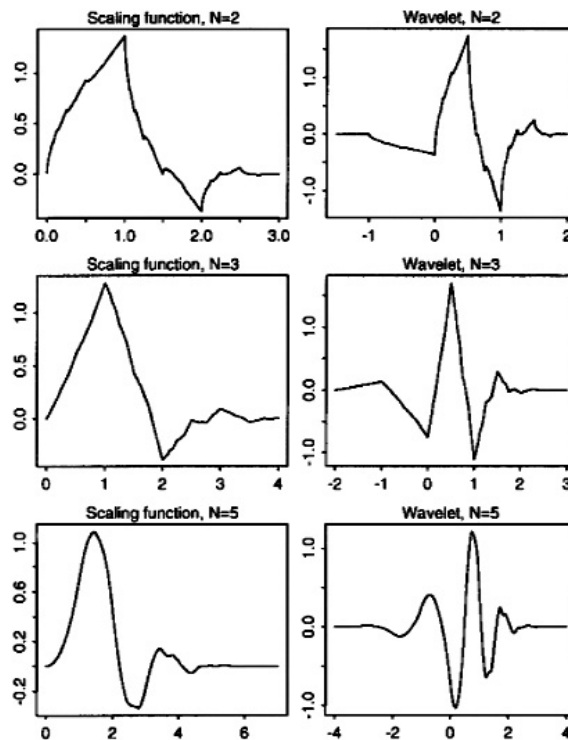


Fig. 1.12 - Tre esempi di funzioni scaling e Wavelet del tipo Daubechies, definite su supporti compatti

Ciascuna di esse è individuata da un intero N ; la oscillazione delle funzioni cresce al crescere di N , come pure la loro continuità.

Con una tale varietà di famiglia di Wavelet c'è da chiedersi quale è da preferire nei problemi di *signal processing*. In molti casi, nelle applicazioni statistiche, una importante qualità che una base Wavelet deve possedere è quella della ortonormalità che, spesso, deve essere rappresentata in un intervallo compatto $[0,1]$.

In applicazioni pratiche, la scelta della famiglia di Wavelet e dell'indice N non è così importante, provato che la corrispondente base è ortonormale.

Negli esempi che seguono sono state impiegate, per la ricostruzione della funzione, definita in (1.4), famiglie Daubechies, con $N=5$. I risultati sono mostrati nella Fig. 1.13.

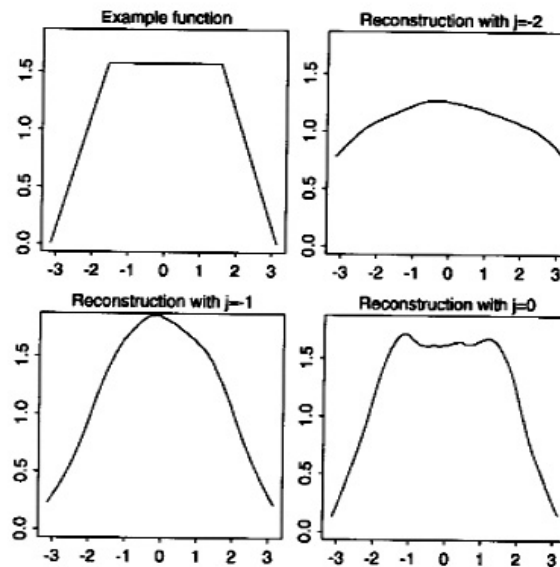


Fig. 1.13 - Un esempio di funzione e di rappresentazione Wavelet impiegando una Daubechies con $N=5$

I coefficienti della funzione di *scaling* (calcolati per integrazione numerica) sono riportati nella Tab. 1.5.

k	j=-2	j=-1	j=0
7	0	0	0.0078
6	0	0.0006	0.0243
5	0.0214	0.0006	0.0749
4	0.1226	0.0296	0.3756
3	0.4581	0.1030	1.3702
2	1.5109	1.8404	1.6069
1	2.4652	2.5179	1.5847
0	0.1536	0.8906	1.6640
1	0	0.0155	0.9159
2	0	0	0.0950

Tab. 1.5 - Coefficienti della funzione di scaling per una Daubechies con $N=5$

Si noti che l'effettivo supporto della Wavelet Daubechies $N=5$ è approssimativamente $[0, 5]$ (il supporto teorico è, invece, $[0, 9]$, ma la funzione è molto vicina allo zero al di fuori di $[0, 5]$). Pertanto ci sono circa 10 funzioni di

scaling non dilatate ($j=0$) con un effettivo supporto in sovrapposizione con $[-\pi, \pi]$, il supporto della funzione esempio, e di conseguenza 10 coefficienti a questo livello.

Comunque, soltanto una parte di questi coefficienti sono grandi abbastanza da partecipare alla ricostruzione. Ovviamente, simili considerazioni possono essere fatte se ci si riferisce ai due livelli inferiori.

Sia ora $x(t)$ una funzione continua definita in uno spazio V_0 cioè $x(t) \in V_0, t \in R$ (Fig. 1.14).

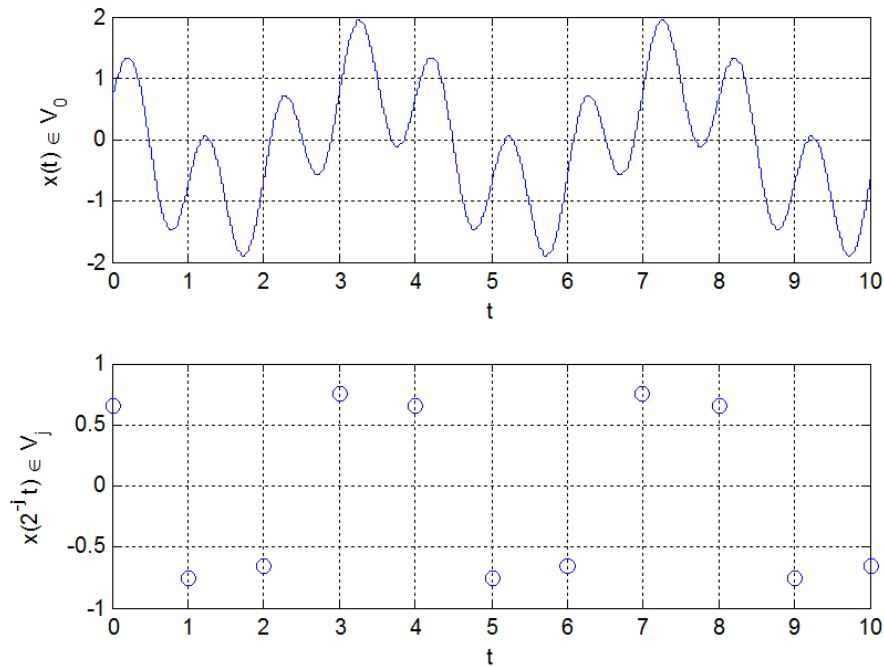


Fig. 1.14

La funzione $x(2^{-j}t)$, $j \in \mathbb{Z}^+$ è una funzione continua a tratti in intervalli di ampiezza 2^{-j} . Essa pertanto appartiene ad uno spazio V_j delle funzioni continue a tratti. Se $j > 0$ allora $V_j \subset V_0$. Nello spazio V_0 supponiamo di definire una base funzionale

$$\phi(t) \in V_0 \rightarrow \{\phi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}.$$

Una tale funzione è detta anche di traslazione.

Essendo V_j un sottospazio di V_0 esso è anche chiamato sottospazio approssimazione di V_0 .

Una sua possibile base funzionale è data da

$$\left\{ 2^{-\frac{j}{2}} \phi(2^{-j}t - k) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

una tale funzione può traslare variando k e può scalare attraverso j .

Ebbene, stante la (1.10), dati i due spazi di approssimazione V_j, V_{j-1} , esiste un sottospazio W_j chiamato di dettaglio tale che

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j.$$

Anche nello spazio di dettaglio W_j possiamo definire una base funzionale che possa traslare e scalare del tipo

$$\left\{ 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-j}t - k) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

dove $\{\psi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ sia una base funzionale dello spazio di approssimazione W_0 .

Abbiamo detto che la funzione $x(2^{-j}t)$ è una funzione continua a tratti in uno spazio V_j . Essa opera una trasformazione di una qualunque funzione continua $x(t) \in V_0$ "lavorando" sulla variabile t . Possiamo da ora in poi individuare nella variabile t , la costante temporale. Nella Fig. 1.15 che segue è rappresentato l'effetto dell'operazione di discretizzazione temporale che si ottiene ogniqualvolta si effettua una misurazione su di un sistema dinamico attraverso

qualsiasi dispositivo. Più "denso" è il tasso di campionamento (*sampling rate*) più informazioni riusciamo a raccogliere nell'unità di tempo⁹.

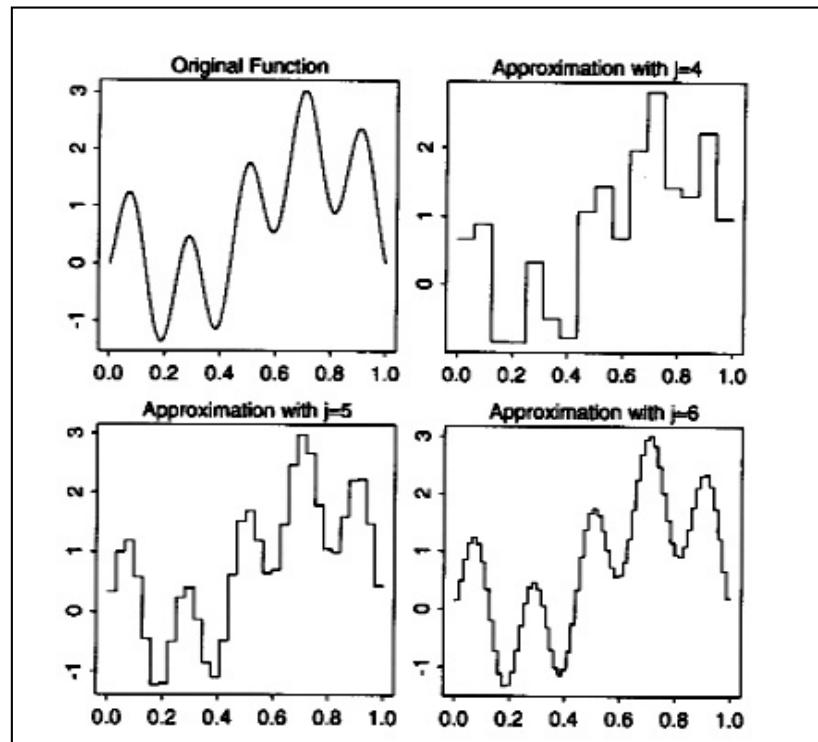


Fig. 1.15

1.9 Equazioni alle differenze

Per la soluzione delle equazioni differenziali si fa ricorso, come è ben noto, a metodi numerici quali ad esempio, quello di Runge-Kutta, di Simpson, Adams, ecc.

Qui, vogliamo presentare il metodo più semplice, quello di Eulero, per meglio evidenziare le caratteristiche possedute dagli altri metodi più complessi e su quali principi essi si basano.

Premettiamo che una corretta rappresentazione di una qualunque funzione/segnale sia quella riportata nella Fig. 1.15 precedente, che bene mette in evidenza l'ipotesi di costanza a tratti della funzione/segnali campionati. D'altronde tale ipotesi è anche alla base del metodo di Eulero per quanto attiene la soluzione numerica di equazioni differenziali. L'approssimazione di cui sopra

⁹ Nel rispetto del Teorema del campionamento di Nyquist-Shannon.

consiste nel ritenere la funzione/segnale costante nell'intervallo di tempo $(t, t + \Delta t)$.

Senza perdere in generalità si consideri la seguente equazione differenziale lineare ordinaria

$$\frac{dy}{dt} = x(t)y(t)$$

con $x(t)$ funzione assegnata o comunque nota. Ebbene dalla definizione di derivata come è noto

$$\frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}. \quad (1.22)$$

Se ipotizziamo un incremento di tempo molto piccolo allora la (1.22) può essere approssimata come

$$\frac{dy}{dt} \stackrel{\Delta t \rightarrow 0}{\approx} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}. \quad (1.23)$$

Se sostituiamo la (1.23) nella (1.22) otteniamo

$$\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} = x(t)y(t)$$

cioè

$$y(t + \Delta t) = y(t) + y(t)x(t)\Delta t. \quad (1.24)$$

La (1.24), che costituisce una equazione alle differenze, bene mette in evidenza il limite di tale tecnica di risoluzione di un sistema di equazioni differenziali: i metodi numerici presentano errori grandi quando vengono applicati

per determinare soluzioni che cambiano rapidamente (ad esempio per la presenza di spike)¹⁰.

Ora, non v'è dubbio che una ipotesi forte che dobbiamo fare quando ricorriamo a questo metodo di risoluzione è che il secondo membro della (1.24) resti costante nell'intervallo di tempo $(t, t + \Delta t)$. Pertanto i metodi numerici applicati con un passo di integrazione piuttosto grossolano portano immancabilmente ad errori gravi allorquando le soluzioni cambiano molto rapidamente. Infine facciamo notare che la (1.24) può essere scritta anche in una forma iterativa che la rende più simile a quelle che abitualmente si usano in questi tipi di problemi:

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + f[t_k, y(t_k)] \Delta t \quad (1.25)$$

dove abbiamo posto

$$t_{k+1} = t_k + \Delta t. \quad (1.26)$$

Per meglio evidenziare quanto testé affermato e soprattutto per meglio mostrare le capacità intrinseche di una base funzionale della famiglia delle wavelet, ci sembra utile riportare il caso rappresentato da un sistema come in Fig. 1.16, costituito da una massa variabile nel tempo, con legge predefinita, collegata ad una molla di rigidità nota.

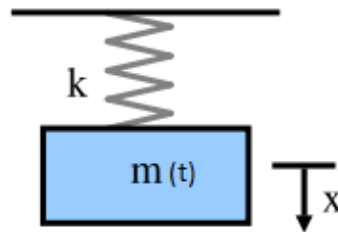


Fig. 1.16

¹⁰ Per tale ragione è utile campionare con tassi dell'ordine di 10^4 Hz, possibilmente con potenze di 2.

Il sistema è descritto dalle equazioni:

$$\begin{cases} m(t) \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \\ x(0) = x_0 \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \end{cases}$$

dove la legge di variazione della massa è:

$$m(t) = 1 - a \left[t - b \left(|t - 3.5|^{0.2} + 3.5^{0.2} \right) \right], \quad (1.27)$$

quando $0 < a < 1$ e $b = 0$, $m(t)$ risulta una legge lineare decrescente.

Per risolvere la seguente equazione differenziale

$$m(t) \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

poniamo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = z(t) = v(t) \\ \dot{z}(t) = -\frac{k}{m(t)} x(t) \end{cases}$$

dove $v(t)$ è una velocità.

Si ha quindi che

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} x \approx \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = v(t)$$

da cui

$$x(t + \Delta t) - x(t) = v(t) \Delta t$$

Discretizzandola e ponendola sotto forma iterativa, abbiamo

$$x(k+1) = x(k) + v(k)\Delta t .$$

Analogamente

$$\dot{z}(t) = -\frac{k}{m(t)}x(t)$$

dove $z(t)$ è anche esso una velocità, per cui

$$\dot{z}(t) = \frac{d}{dt}z \approx \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t} = -\frac{k}{m(t)}x(t)$$

da cui si ottiene

$$z(t+\Delta t) - z(t) = -\frac{k}{m(t)}x(t)\Delta t .$$

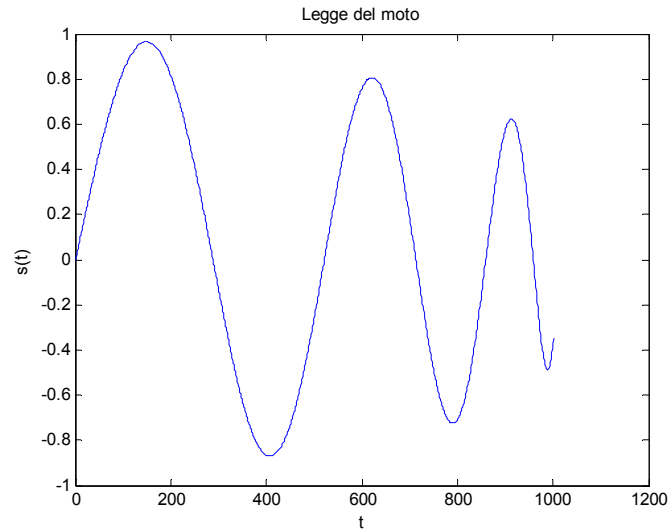
Discretizzandola

$$z(k+1) - z(k) = -\frac{k}{m(k)}x(k)\Delta t$$

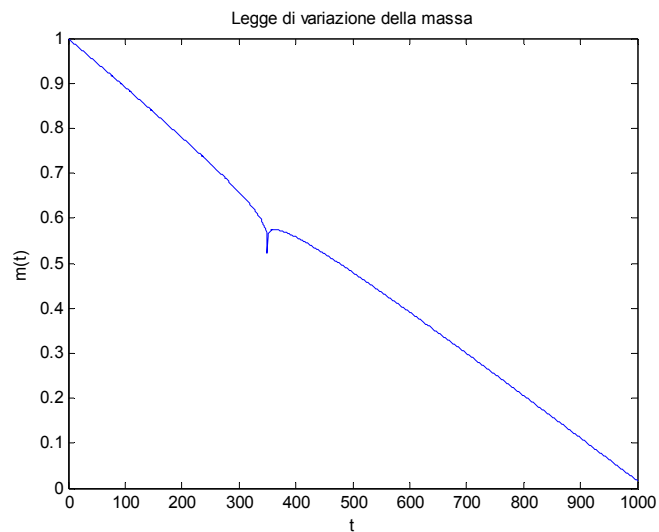
per cui

$$z(k+1) = z(k) - \frac{k}{m(k)}x(k)\Delta t . \quad (1.28)$$

A tal punto siamo in grado di tracciare la legge del moto della massa variabile (Fig. 1.17)

**Fig. 1.17**

Effettivamente questa è la legge del moto che ci aspettiamo di ritrovare. C'è, però, un problema: la legge della variazione della massa è illustrata in Fig. 1.18

**Fig. 1.18**

È ben evidente la presenza di uno spike nell'intervallo temporale $[300, 400]$. Evidentemente l'ipotesi di costanza euleriana in questo caso non è applicabile. Il problema potrebbe essere risolto ricorrendo ad un rapporto ottimo tra tasso di campionamento del segnale e tasso di incremento temporale Δt . Questo fatto, però, a priori non è sempre facilmente risolvibile.

Il ricorso alla Trasformata Wavelet (WT) ci consente, però, di esaminare più in dettaglio la legge del moto ottenuta dall'analisi differenziale. Mostriamo nelle Fig. 1.19 e Fig. 1.20 seguenti i coefficienti di approssimazione e di dettaglio, rispettivamente, che si ottengono applicando alla legge del moto, ricavata iterativamente, un filtro wavelet opportuno.

Sottolineiamo che da ora in avanti ogniqualvolta facciamo riferimento al diagramma dei coefficienti Wavelet (approssimazione, dettaglio), l'ordinata rappresenta l'ampiezza adimensionale di tali coefficienti, mentre l'ascissa, salvo avviso contrario, indica il numero di punti costituenti il segnale e cioè, in modo equivalente l'intervallo temporale di osservazione.

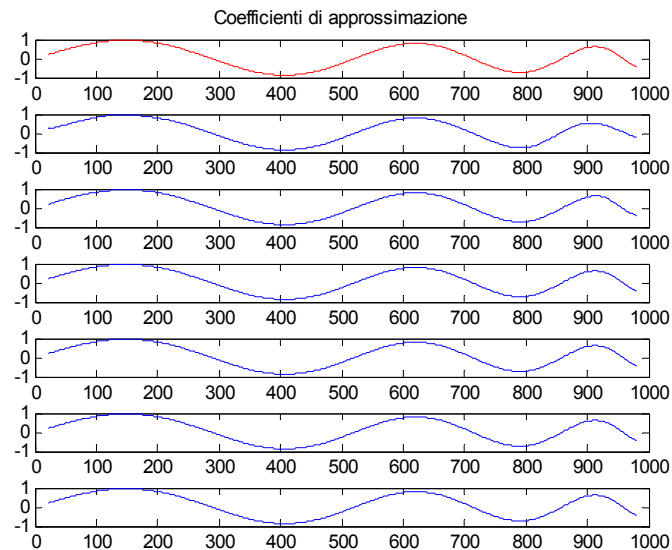


Fig. 1.19

Questa volta è ben evidenziata la presenza di uno spike all'istante $t \approx 350$. Esso, in realtà era nascosto dagli errori di arrotondamento generati dal metodo di risoluzione alle differenze finite impiegato per la soluzione del sistema di equazioni differenziali relativo al modello in oggetto.

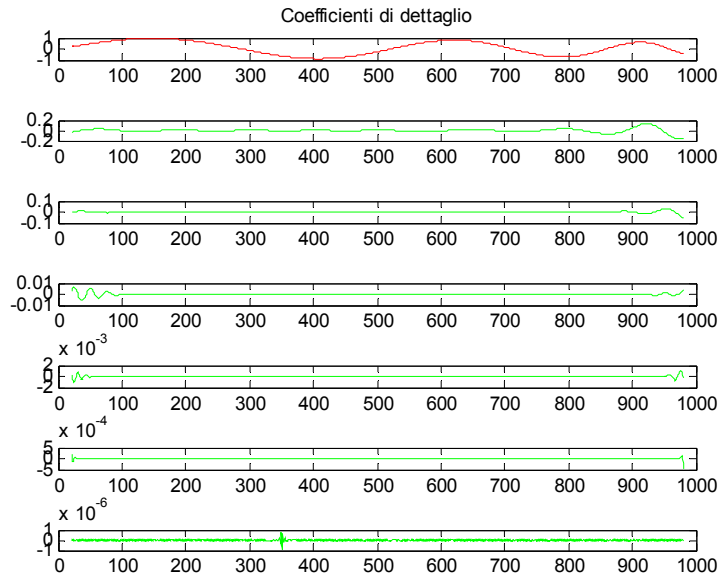


Fig. 1.20

Questo esempio ci permette di affermare che se si intendono indagare le variazioni di un sistema dinamico nel tempo (è questo il caso del monitoraggio), allora certamente, a meno di casi particolari, questo non può essere messo in atto adoperando metodi che si avvalgono di macro parametri, né tantomeno è praticabile la via che porta a indagini stocastiche. Il campo di indagine di cui parliamo è rappresentato da minime variazioni dinamiche, molte volte costituite da brevi treni di spike che il più delle volte, come già detto, sono precursori di danni irreversibili di natura elasto-cinetico-dinamica causati da usure, rotture, lesioni, fratture, ecc.

Esse, proprio perché sono precursori di potenziali gravi danni futuri, vanno immediatamente rilevati e classificati.

Per fare ciò, però, dobbiamo necessariamente spostare il nostro campo di osservazione dalla bassa all'alta frequenza. È, infatti, in questo campo dello spettro di frequenza che si annidano gli spike: piccola ampiezza e alta frequenza.

Allora, il problema è quello di poter impiegare metodi che consentano di rilevare tali spike e nello stesso tempo di distinguerli tra eventi aleatori ovvero caotici deterministici.

Il primo problema, il rilevamento, può essere affrontato con l'impiego di opportune funzioni wavelet. Il secondo, invece, è un po' più complesso: infatti occorre analizzare molto attentamente la sequenza numerica con metodi afferenti

alla Teoria del Caos deterministico e con strumenti di analisi quali lo spazio delle fasi, l'*embedding*, la dimensione frattale, ecc. Da qui la necessità di integrare queste due fasi di processamento dei dati: Trasformata Wavelet e Teoria del Caos.

Pertanto una base funzionale che possa essere utilmente impiegata nei problemi di cui sopra per essere definita tale deve avere le seguenti proprietà:

1. ortonormalizzabile
2. completa
3. supporto compatto
4. scala temporale
5. adattativa

1.10 Base Hilbertiana

Quando ci riferiamo alle serie di Fourier, la loro somma, che abusivamente chiamiamo combinazione lineare, è formata da infiniti termini. Eppure, una tale combinazione restituisce proprio la funzione¹¹. Questa base in realtà è chiamata base hilbertiana. Essa richiama il fatto che è ambientata in uno spazio di Hilbert, dove essendo definita una topologia ha senso parlare di limite della serie e di combinazione lineare di infiniti termini.

Ricordiamo che in algebra, ogni spazio vettoriale, non costituito da un solo elemento, è dotato di base. Il numero di addendi della base è dato dalla dimensione dello spazio. Ad esempio, uno spazio vettoriale di dimensione 5 avrà infinite basi formate da 5 vettori.

Pertanto, se esiste un sistema ortonormale completo in uno spazio di Hilbert esso è chiamato base Hilbertiana (non è una base in senso algebrico), e sarà formata da infiniti termini.

Supponiamo, ora, che il sottospazio H di Hilbert abbia dimensione finita. Allora la proiezione su H di un elemento $x \in H$ è data da

$$P_H x = (x, e_1)e_1 + (x, e_2)e_2 + \cdots + (x, e_n)e_n, \quad (1.29)$$

¹¹ Ciò perché la chiusura del sottospazio è proprio lo spazio.

dove i vettori $\{e_i\}$, $i=1, \dots, n$, sono a due a due ortogonali. Ciò premesso la norma in uno spazio pre-hilbertiano, assegnati due vettori y_1, y_2 , è data da (ricordando il T. di Pitagora)

$$\|y_1 + y_2\|^2 = \|y_1\|^2 + \|y_2\|^2. \quad (1.30)$$

Notiamo che la (1.30) è vera. Infatti

$$\|y_1 + y_2\|^2 = (y_1 + y_2, y_1 + y_2).$$

Se i vettori sono ortogonali allora

$$(y_1, y_1) = \|y_1\|^2 \text{ mentre } (y_1, y_2) = 0$$

perché ortogonali. Da cui ricaviamo la (1.30).

Il T. di Pitagora si estende anche al caso di n vettori a due a due ortogonali come in (1.29). Questa si può anche scrivere come

$$P_H x = \sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i \quad (1.31)$$

da cui per il T. di Pitagora

$$\|P_H x\|^2 = \sum_{i=1}^n \|(x, e_i) e_i\|^2. \quad (1.32)$$

Il prodotto scalare che compare nella (1.32), poiché per definizione è un numero, può essere portato fuori dalla norma, per cui la (1.32) può risciversi come

$$\|P_H x\|^2 = \sum_{i=1}^n |(x, e_i)|^2 \|e_i\|^2. \quad (1.33)$$

Poiché il secondo fattore vale 1 in quanto tutti i vettori hanno norma unitaria la (1.33) diventa infine

$$\|P_{H_n} x\|^2 = \sum_{i=1}^n |(x, e_i)|^2. \quad (1.34)$$

Abbiamo così ricavato una proprietà che riguarda la norma della proiezione. Abbiamo non soltanto l'espressione della proiezione ma anche quella della norma al quadrato.

A questo punto ci chiediamo: cosa succede se la (1.29) fosse una successione ortonormale? Osserviamo che la (1.29) deve valere per qualunque n . Allora se $n \rightarrow +\infty$ la (1.29) è ancora valida? Se il limite della successione esiste ed è finito allora la (1.32) diventa

$$\|P_{\overline{X}} x\|^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} |(x, e_i)|^2. \quad (1.35)$$

Questa espressione molto importante ci assicura l'esistenza del limite della successione a patto che X appartenga alla sua chiusura \overline{X} . Infatti $P_{H_n} x$ tende alla proiezione ortogonale sulla chiusura di \overline{X} .

In particolare se il sistema ortogonale è anche completo allora la (1.35) diventa

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} |(x, e_i)|^2 \quad (1.36)$$

nota anche come uguaglianza di Parseval.

Notiamo che la (1.36) è anche condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema ortonormale sia completo.

Si dimostra infine che

$$\|P_H x\|^2 \leq \sum_{i=1}^{+\infty} |(x, e_i)|^2 \quad (1.37)$$

nota anche come disuguaglianza di Bessel.

La (1.21) adattata alle funzioni wavelet diventa

$$f(x) = \sum_k c_{j_0,k} \varphi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0}^{j_1} \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(x), \{k \in \mathbb{Z}, j_0 = 0, j_1 = \text{int}(\log_2 N)\} \quad (1.38)$$

dove

$$c_{j,k} = \langle f, \phi_{j,k} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \phi_{j,k}(x) dx \quad (1.39)$$

e

$$d_{j,k} = \langle f^{J_0}, \psi_{j,k} \rangle = 2^{j/2} \int_{k2^j}^{(k+1)2^j} f^{J_0}(x) \psi(2^j x - k) dx \quad (1.40)$$

Capitolo 2

La Teoria del Caos

2.1 Caos

Non è facile dare una definizione esaustiva del termine caos. Ci sembra, comunque, molto appropriata la seguente: *"un comportamento aperiodico a lungo termine di un sistema deterministico non lineare che manifesta elevata sensibilità alle condizioni iniziali"*.

Già nel 1908 Poincaré¹² osservava a proposito: *"... it may happen that small differences in the initial conditions produce very great ones in the final phenomena. A small error in the former will produce an enormous error in the latter. Prediction becomes impossible and we have the fortuitous phenomenon."* Ebbene, sistemi siffatti vengono chiamati "caotici". Per essi è impossibile predirne l'evoluzione che oltre che dipendere dalle condizioni iniziali (anche minime variazioni comportano variazioni imprevedibili nella loro evoluzione) in alcuni istanti sembrano avere un comportamento apparentemente stocastico. Tale casualità è però solo apparente a causa della loro intrinseca "natura". In quanto segue vedremo come, alla luce delle più moderne tecniche di analisi, tali segnali complessi, possono essere studiati. Vedremo quante e quali informazioni si nascondono in una sequenza temporale di tal tipo.

Una successione temporale di valori numerici è la tecnica comunemente impiegata per acquisire la "mappa" di un determinato sistema dinamico. Osserviamo, preliminarmente, che comportamenti caotici sono, il più delle volte, generati da particolari condizioni dinamiche in cui viene a trovarsi il sistema oggetto di studio. Da un punto di vista prospettico l'identificazione e la caratterizzazione di processi non lineari eventualmente presenti in segnali

¹² Poincaré H., Science et Méthode, Paris, Flammarion, 1908.

complessi, renderebbe più affidabili i modelli impiegati per descrivere il comportamento dinamico di tali sistemi. A tal proposito, scriveva Palus¹³, con riferimento ai segnali eegrafici: "*...the chaotic measures do not measure chaos any more, but reflect macroscopic statistical properties of the studied data.*"

Si sottolinea l'importanza della precedente riflessione di Palus: la macroscopicità di una misurazione di un evento definibile caotico.

Ancora, a proposito del problema della non-stazionarietà di alcuni dati. La non stazionarietà può essere dedotta da cambiamenti osservati durante la misurazione della dinamica di un sistema, quantunque non esiste, ad oggi, un accordo circa la definizione di stazionarietà per serie temporali reali; infatti un segnale potrebbe essere considerato stazionario per alcune applicazioni e non esserlo, invece, per altre. Pertanto il concetto di stazionarietà oltre ad essere relativo è anche difficile da verificare¹⁴.

Inoltre, poiché in natura i fenomeni sono intrinsecamente non lineari, non è da trascurare la differenza sostanziale che esiste tra un sistema lineare ed uno non lineare. Nel primo caso vige il "principio di additività degli effetti" nel senso che un sistema, per quanto complesso, può sempre essere risolto tramite un sistema di equazioni lineari. Si tratta, cioè, di scomporre qualsiasi sistema dinamico complesso in modelli elementari. La composizione lineare delle loro singole soluzioni consente di ricavare la soluzione dell'intero sistema complesso. Lo stesso principio non è applicabile ai sistemi non lineari e né tantomeno caotici. Eppure in natura sono più evidenti sistemi di quest'ultimo tipo. Non esiste in questi casi un approccio analitico generale che ci consente una soluzione, infatti equazioni non lineari possono generare sia ordine che caos. In quest'ultimo caso non esistono soluzioni analitiche utili.

Si è detto che un sistema, per essere definito caotico, deve presentare elementi o proprietà non-lineari. Un assunto di base è che un sistema lineare non può esibire vibrazioni caotiche. Di conseguenza, in un sistema lineare, ingressi

¹³ Palus, M. (1999). Nonlinear dynamics in the EEG analysis: Disappointments and Perspectives. Nonlinear dynamics and brain functioning. Pradhan, N., Rapp. P. E. & Sreenivasan, R. (Eds.), Novascience, NewYork.

¹⁴ Schreiber, T. (1999). Interdisciplinary application of nonlinear time series methods. Phys. Rep. 308, 2.

periodici produrranno uscite proporzionalmente periodiche, trascorso il transitorio.

È pur vero che, per vari motivi, i sistemi cosiddetti lineari sono una eccezione da qui l'esigenza di estendere lo studio ai sistemi meccanici non-lineari.

Comportamenti elastici di tipo non-lineare possono essere indotti sia dalle proprietà del materiale che dalla particolare geometria di un componente meccanico che può assumere più posizioni o stati di equilibrio critici determinati, ad esempio, da fenomeni di usura precoce ed anomala.

Nel campo delle vibrazioni caotiche, non vi sono ingressi assunti come *random*; cioè, le forze applicate o le eccitazioni sono assunte essere deterministiche.

Per definizione, le vibrazioni, cosiddette caotiche, nascono da sistemi fisici deterministici o da equazioni differenziali o alle differenze (che comunque sono deterministiche).

In genere, la vibrazione anomala non mostra un *pattern* visibile ovvero periodicità particolari, tanto più se l'osservazione si riferisce ad una lunga sequenza temporale. Inoltre, molti sistemi a comportamento non lineare, mostrano vibrazioni *quasi-periodiche* in cui sono presenti due o più segnali periodici incommensurabili, cioè che presentano un rapporto irrazionale delle loro rispettive frequenze. In tal caso segnali non-periodici possono sempre scomporsi nella somma di funzioni armoniche periodiche del tipo

$$x(t) = C_1 \text{sen}(\omega_1 t + d_1) + C_2 \text{sen}(\omega_2 t + d_2)$$

dove $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ è un numero irrazionale.

2.2 Sistemi dinamici

Un qualsiasi sistema fisico che evolve temporalmente sulla base di una ben definita regola è chiamato sistema dinamico. Esso è costituito dal fatto che il tasso di variazione delle sue variabili è determinato dai valori assunti da funzioni, che identificano ciascuna variabile, in un ben definito istante temporale.

Diciamo S un tale sistema (Fig. 2.1).

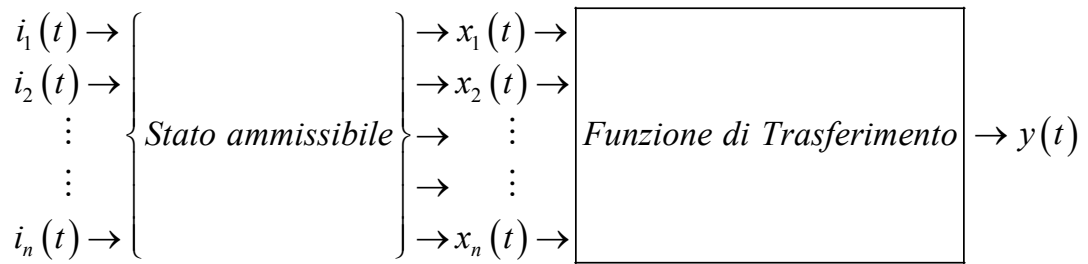


Fig. 2.1

Per studiare e comprendere la dinamica del sistema dovremmo poter misurare l'evoluzione nel tempo di tutte le sue variabili. A ciò facciamo notare che a volte non esiste un modello e pertanto tale indeterminazione comporta l'impossibilità di stabilire quali sono le variabili che partecipano alla descrizione del sistema. Se ipotizziamo di aver determinato n variabili di stato $x_1(t), \dots, x_n(t)$, le cui misure siano tecnicamente ed economicamente possibili poter rilevare, allora possiamo immaginare un funzionale il cui dominio è dato dallo spazio R^n delle n variabili di stato ed a valore in R tramite la sola variabile $y(t)$. Si vengono così a determinare gli insiemi:

T : tempo, con $t \geq 0$

X : stati ammissibili in ogni istante t

Y : uscite ammissibili in ogni istante t .

È chiaro che T è invariante, mentre sia X che Y sono a loro volta funzioni degli ingressi $i(t)$ ammissibili in ogni istante t . Questi, a loro volta, costituiscono un insieme che chiameremo I . Infine, per generalizzare il problema, chiamiamo

Ω l'insieme costituito da tutte le funzioni di ingresso $i(t)$ ammissibili. Rimanendo nel campo della generalizzazione possiamo pensare ad esempio, alle funzioni di ingresso come ad una decisione, una scelta politica, una ben definita azione, mentre l'uscita può essere interpretata come una conseguenza, un effetto di una ben determinata scelta politica, decisioni operate a monte.

In Fig. 2.2 è schematizzato il modello di un sistema dinamico in cui abbiamo evidenziato una funzione ϕ e g definite rispettivamente

$$\phi(\cdot, \cdot): x(t) = \phi(x(0), i(t)), \quad t \in [0, t[$$

e

$$g(\cdot, \cdot): y(t) = g(x(t), i(t)), \quad t \geq 0.$$

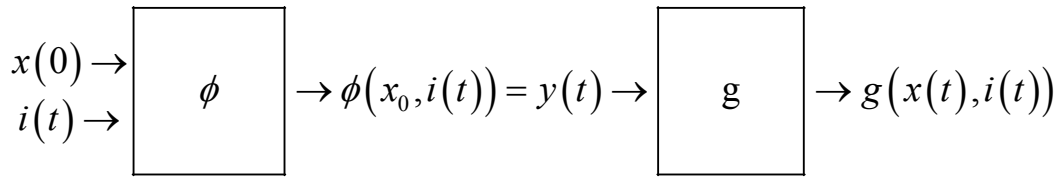


Fig. 2.2

La prima funzione risente dello stato iniziale $x(0)$ in cui si trova il sistema dinamico e della funzione di ingresso $i(t)$ che agisce sul sistema stesso. La funzione g invece determina l'uscita $y(t)$ in base alla funzione di ingresso applicata/prescelta ed allo stato assunto dal sistema per effetto dell'ingresso applicato.

Un modello come quello esemplificato in Fig. 2.2, in genere è quello adoperato per "modellare" un sistema reale. Esso potrà essere più o meno accurato.

Notiamo che se $t \in N$ allora i sistemi si chiamano discreti, se invece $t \in R$ parliamo di sistemi continui.

Inoltre diciamo che il sistema è a dimensione finita n se $X \subseteq R^n (C^n)$. È, inoltre, regolare, di dimensione n , se la funzione ϕ può essere implicitamente descritta da un sistema di n equazioni del tipo

$$x(t+1) = f(x(t)) \begin{cases} x_1(t+1) = f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ x_n(t) = f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \end{cases}$$

se $i \equiv 0$.

Il sistema può essere, però, anche descritto da un insieme di equazioni differenziali ordinarie:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \end{cases}$$

se $u \equiv 0$.

Nel nostro caso è di interesse conoscere sui tempi lunghi (asintotici) qual è il comportamento del sistema dinamico per diverse condizioni iniziali. Ebbene i comportamenti possibili (chiamati anche regimi) possono essere di quattro tipi Fig. 2.3 (attrattori).

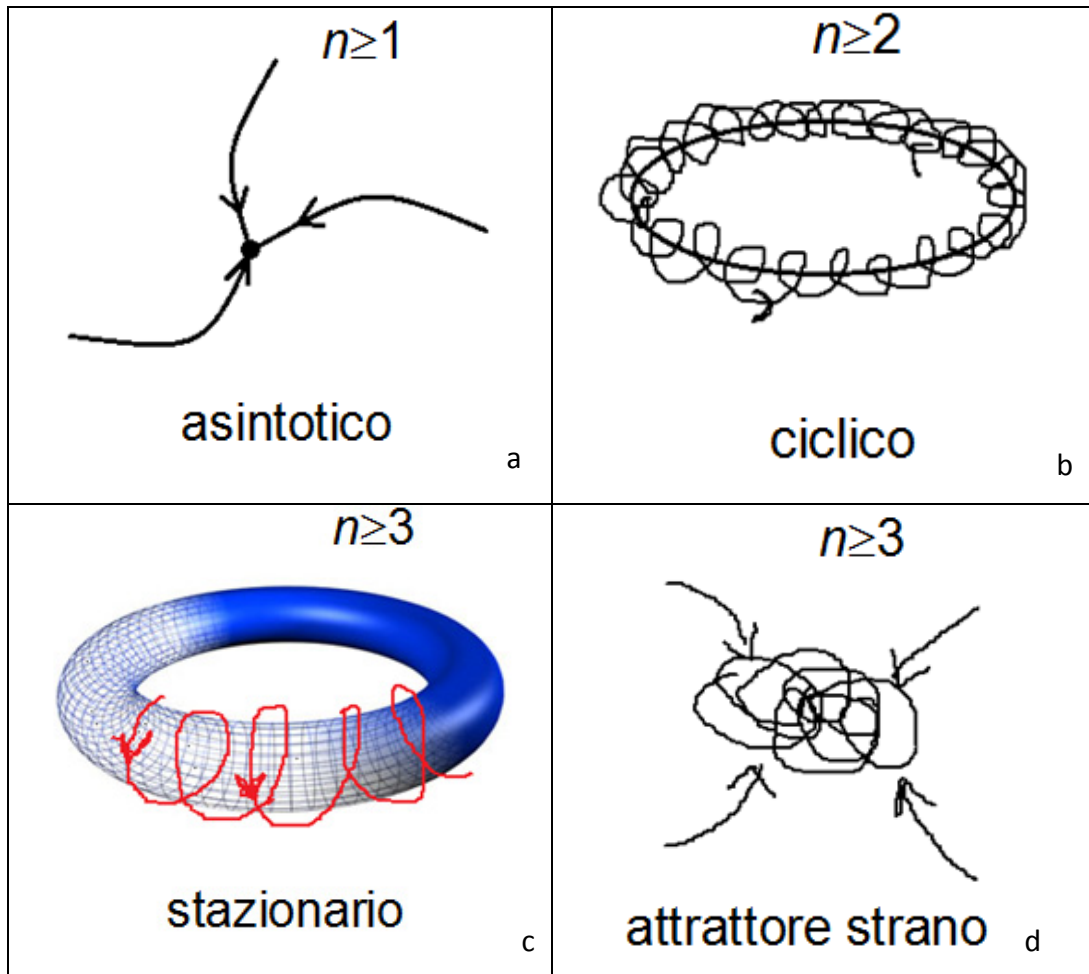


Fig. 2.3

Nella Fig. 2.3a è illustrato il comportamento asintotico che definisce un attrattore stazionario (o di equilibrio). La Fig. 2.3b mostra un tipico attrattore che chiamiamo ciclico. La Fig. 2.3c illustra un attrattore definito toro mentre in Fig. 2.3d è riportato un tipico comportamento che chiamiamo attrattore strano.

2.3 Spazio delle fasi o spazio di stato (*phase space*)

Da quando precede sembra evidente che un insieme dinamico può essere rappresentato in uno spazio nel quale su un asse riportiamo la posizione e nell'altro asse le velocità da esso assunte. Una tale rappresentazione è chiamata spazio delle fasi. Pertanto in un sistema dinamico ad n gradi di libertà la dimensione dello spazio delle fasi è $2n$.

L'evoluzione di un suddetto sistema può essere rappresentato riportando, istante per istante, la posizione di ogni suo punto rappresentativo. In tal caso chiamiamo traiettoria o orbita una tale rappresentazione. L'insieme di tutte le possibili orbite che si originano da tutte le possibili condizioni iniziali danno luogo ad un "flusso" il quale è governato da $2n$ equazioni differenziali del primo ordine

$$\frac{dx_i}{dt} = F(x_1, x_2, \dots, x_n; v_1, v_2, \dots, v_n), \quad i = 1, \dots, n \quad (2.1)$$

$$\frac{dv_i}{dt} = F(x_1, x_2, \dots, x_n; v_1, v_2, \dots, v_n), \quad i = 1, \dots, n \quad (2.2)$$

avendo indicato con n il numero di gradi di libertà del sistema.

Pertanto, per rappresentare un punto del sistema nello spazio delle fasi, dobbiamo calcolare i valori di posizione e velocità nei vari istanti cioè

$$x_{t+1} = x_t + F_t(x_1, x_2, \dots, x_n; v_1, v_2, \dots, v_n) \quad (2.3)$$

per la posizione e

$$v_{t+1} = v_t + F_t(x_1, x_2, \dots, x_n; v_1, v_2, \dots, v_n) \quad (2.4)$$

per la velocità; avendo indicato con t la variabile temporale, supposta discreta. In quanto segue indicheremo più semplicemente la (2.3) e la (2.4) rispettivamente come segue

$$x(t+1) = f(x(t)) \quad (2.5)$$

e

$$\dot{x}(t+1) = f(x(t)). \quad (2.6)$$

Poiché faremo spesso riferimento a termini quali stazionario, deterministico, random ecc., al fine di evitare equivoci brevemente diamo alcune definizioni in merito.

Parlando di sistemi dinamici, le regole che li governano possono essere funzioni di una sola o più variabili, nel primo caso si dicono monodimensionali nel secondo multidimensionali. La variabile indipendente in generale è di tipo temporale, pertanto chiameremo a tempo continuo o a tempo discreto le classi di sistemi dinamici con riguardo alla variabile tempo.

Spesso rappresenteremo l'evolversi di un sistema dinamico tramite sequenze numeriche a tempo discreto. In tal caso la variabile indipendente viene indicata con la notazione $x(n)$. Una sequenza (discreta o continua) si dice deterministica se è completamente descritta da una espressione matematica ovvero da un diagramma ovvero da una regola di qualunque tipo.

Si chiama aleatoria una sequenza che è collezione di sequenze ognuna delle quali corrisponde ad un singolo risultato di un esperimento casuale. Si dirà, infine, stazionaria una sequenza invariante rispetto al tempo.

Abbiamo detto, dunque, che un sistema dinamico si dice deterministico se nota la "legge" che lo governa è possibile predire gli stati di evoluzione futura. In quanto segue ci riferiamo a sistemi in cui la variabile temporale è discretizzabile. D'altronde i sistemi continui, se studiati con tecniche di calcolo numerico di discretizzazione, vengono ricondotti a sistemi discreti. Pertanto, l'estensione, di fatto, alle continuità temporali è legata al concetto di densità di campionamento di un determinato fenomeno o sistema dinamico che dir si voglia.

Allora supponiamo che un sistema dinamico discreto evolva ad uno stato definito da un operatore che chiameremo Φ cioè

$$\Phi: A \times Z \rightarrow \Omega \quad (2.7)$$

dove con $A \subseteq R^n$ abbiamo indicato un insieme chiuso e limitato e con Z uno spazio vettoriale degli stati in cui un vettore $z_n \in A \subseteq R^n$ consente di definire lo stato del sistema. Per quanto ipotizzato avremo

$$\Phi(z_n, t) = z_{n+t} \quad (2.8)$$

cioè se è possibile determinare tramite la (2.8) lo stato (posizione e velocità) del sistema per qualsiasi $t > 0$, allora il sistema dinamico descritto da (A, Φ) è detto deterministico e lo sarà anche l'operatore Φ .

Inoltre se dato $m \neq n$ si ha

$$x_n = x_m \Rightarrow \Phi(x_n, \cdot) = \Phi(x_m, \cdot) \quad (2.9)$$

allora il sistema dinamico si dirà stazionario.

L'insieme A lo abbiamo supposto chiuso e limitato, ebbene se esso inoltre soddisfa le seguenti tre condizioni di essere:

- invariante
- attrattivo
- indecomponibile o minimo

allora lo chiamiamo attrattore.

È noto che se $A \subseteq R^n$ allora può essere definito chiuso e limitato cioè compatto. Ricordiamo che in R limitato significa dotato di minoranti e maggioranti e nel far questo si utilizza l'ordinamento (R è un insieme totalmente ordinato). Nel piano (R^2) un insieme si dice limitato quando esiste un cerchio o un intervallo che lo contiene. Ad es. l'insieme X rappresentato in Fig. 2.4 è limitato in R^2 .

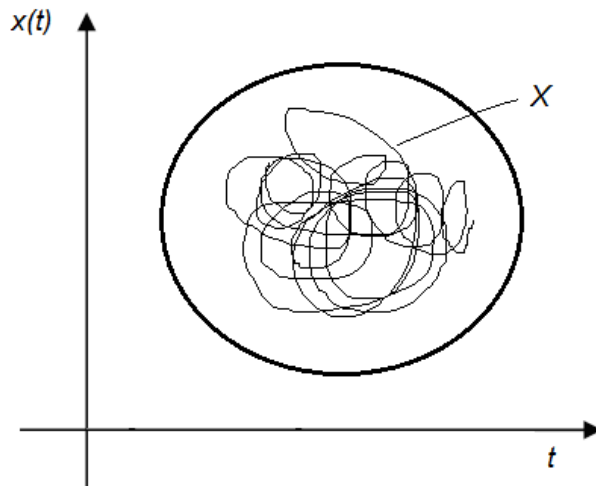


Fig. 2.4

Ricordiamo che l'intervallo di R^2 è il prodotto cartesiano $R \times R$ (R è un insieme numerico ordinato). I cerchi sono, invece, particolari sottoinsiemi che utilizzano un altro concetto di distanza tra due punti. Un cerchio di centro C e raggio r è un insieme di tutti i punti che hanno distanza da $C < r$ (cerchio aperto) o $\leq r$ (cerchio chiuso). Ricordiamo che in R^n ,

$$X \text{ Compatto} \Leftrightarrow X \text{ chiuso e limitato, se } X \subseteq R^n.$$

Infine ricordiamo che un insieme si dice chiuso quando l'insieme complementare è aperto.

Tornando alle tre condizioni a cui deve soddisfare un insieme per chiamarsi attrattore, chiariamo che $A \subseteq R^n$ è invariante se $x(0) \in A \Rightarrow x(t) \in A, \forall t$. La seconda condizione si può esplicitare dicendo che deve esistere intorno ad $A \subseteq R^n$ un insieme aperto che chiameremo Bacino di Attrazione B tale che

$$x(0) \in B \supset A \Rightarrow x(t) \rightarrow A, \text{ per } t \rightarrow +\infty.$$

Se esiste un tale insieme B allora diremo che A è immerso in B .

La condizione precedente si può esplicitare dicendo che non esiste un sottoinsieme proprio che gode delle proprietà di essere un compatto e né tanto

meno rispettare le due prime condizioni. Una particolarità di A è che esso è denso nel senso che da qualunque punto di A si parte prima o poi si passa arbitrariamente vicino a qualunque punto di A . La Fig. 2.5 esemplifica quanto finora riportato.

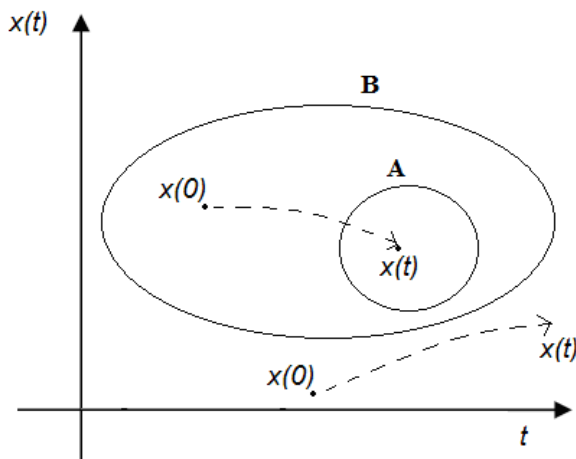


Fig. 2.5

Il bacino di attrazione è quindi un particolare insieme costituito da punti tali che

$$B(A) = \{x : \Phi(x, t) \rightarrow A\}. \quad (2.10)$$

2.4 Punto fisso

Indichiamo con g la corrispondenza che associa la rotazione di un piano supposto rigido rispetto ad un determinato punto P_0 del piano stesso (Fig. 2.6).

$$g : R^2 \rightarrow R^2$$

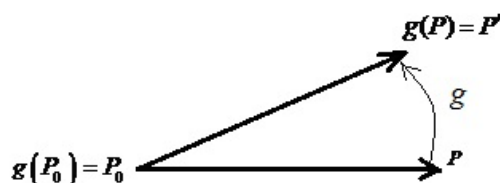


Fig. 2.6

Il punto P_0 coincide con la propria immagine (o corrispondente):

$$g(P_0) = P_0.$$

La funzione

$$g(P) = P,$$

nell'incognita P , ammette una ed una sola soluzione: il punto P_0 . Infatti, esso è l'unico punto del piano che non ruota. Allora possiamo dire che un punto che coincide con il suo corrispondente si chiama punto fisso.

Questo concetto lo abbiamo esteso al caso di una funzione di una sola variabile f , nel piano, definita nell'intervallo (a, b) :

$$f: [a, b] \rightarrow [a, b].$$

Il diagramma è esemplificato nella Fig. 2.7 seguente.

Ebbene il diagramma della funzione, per come è stata definita, è contenuto nel rettangolo $[a, b] \times [a, b]$.

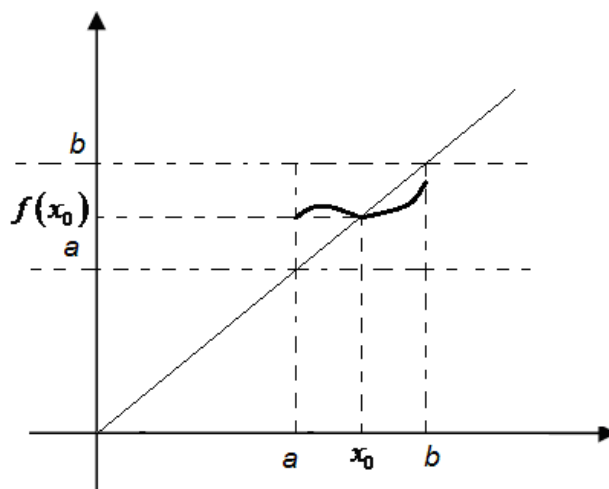


Fig. 2.7

Consideriamo la bisettrice del primo quadrante; notiamo un punto del diagramma che interseca la bisettrice. Se diciamo x_0 la sua ascissa, allora abbiamo che

$$f(x_0) = x_0.$$

Per quanto detto in precedenza la corrispondenza

$$f(x) = x \quad (2.11)$$

quindi presenta un punto fisso (x_0).

Se la funzione avesse esibito un diagramma, come ad esempio quello riportato in Fig. 2.8, allora avrebbe avuto tre punti fissi e la (2.11) avrebbe ammesso tre soluzioni.

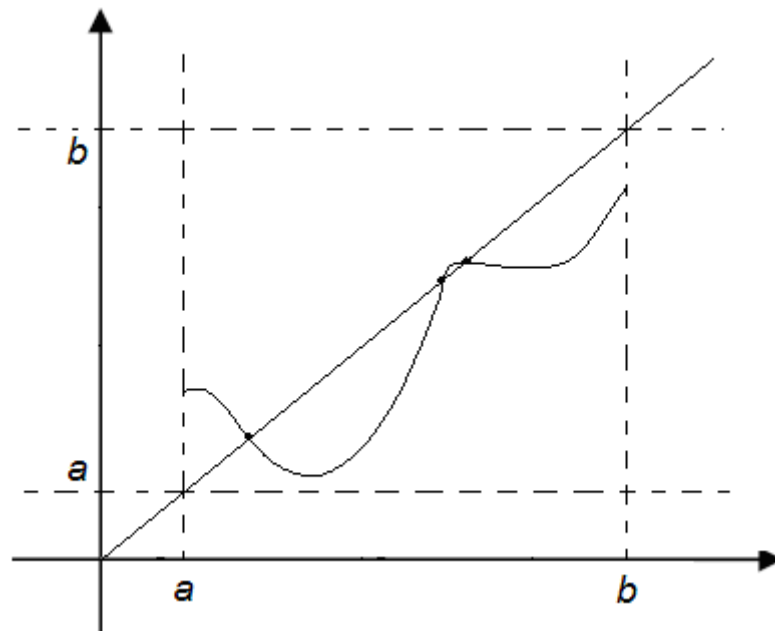


Fig. 2.8

Naturalmente la funzione potrebbe anche non ammettere alcun punto fisso, così come ne potrebbe ammettere infiniti.

Osserviamo che nel caso della traslazione o rotazione del piano abbiamo parlato di funzioni del tipo $R^2 \rightarrow R^2$ (punti del piano), successivamente abbiamo parlato di funzioni del tipo $[a, b] \rightarrow [a, b]$ (intervalli del piano).

Consideriamo ora il seguente problema di Cauchy costituito da una equazione differenziale del primo ordine con condizione iniziale nota:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.12)$$

Per quanto da noi sviluppato nella presente ricerca, a proposito della integrazione tra la Trasformata Wavelet e la alcuni principi afferenti alla Teoria del Caos, è molto importante convertire la (2.12) in un problema di punto fisso.

La funzione $y = y(x)$ deve essere tale che:

$$\forall x \in I, y(x) = (x, y(x)) \in A \quad (\text{I condizione})$$

dove con A abbiamo indicato l'insieme di definizione della funzione $f(x, y)$ (Fig. 2.9).

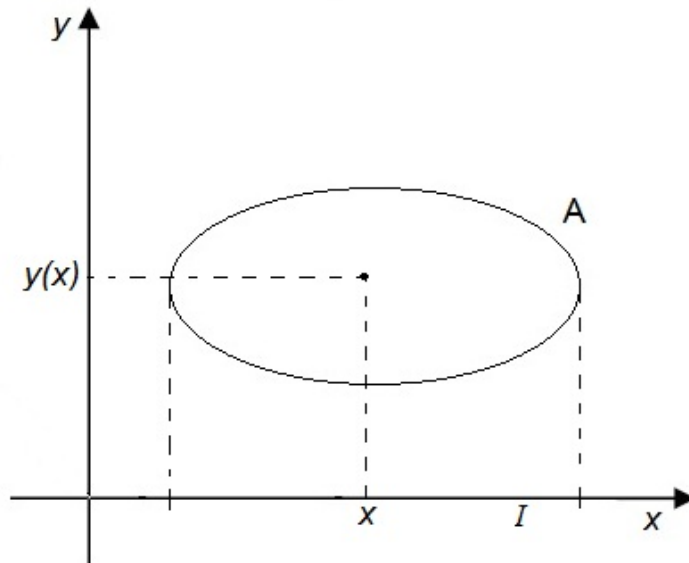


Fig. 2.9

Inoltre deve accadere che

$$\forall x \in I, y'(x) = f(x, y(x)) \quad (\text{II condizione})$$

cioè la derivata della funzione incognita deve essere uguale a $f(x, y(x))$.

Ovviamente per fare in modo che sia verificata la seconda condizione deve accadere che il punto $(x, y(x)) \in A$ (Fig. 2.10).

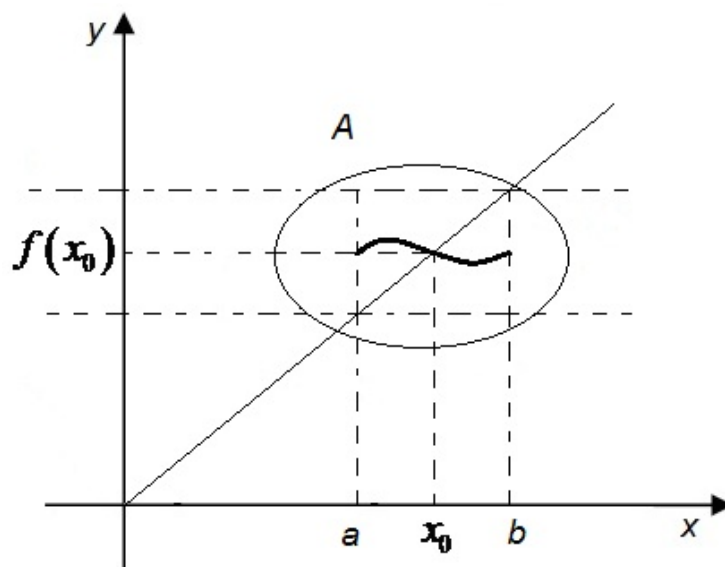


Fig. 2.10

Di conseguenza il diagramma della funzione incognita $y = y(x)$ deve essere contenuto in A . Cioè il problema è quello di trovare una funzione $y = y(x)$ definita in un intervallo I ($x \in I$) il cui diagramma sia contenuto in A . Inoltre la derivata di questa funzione in un qualunque punto dell'intervallo I deve essere uguale al valore di f in quel punto.

Tutto questo è sintetizzato nel simbolismo della (2.12).

Il problema di Cauchy si completa con le condizioni iniziali, cioè tra le infinite soluzioni c'è ne sarà una in particolare il cui diagramma deve passare per il punto di coordinante $(x_0, y_0) \in A$.

Ammettiamo che questo problema ammetta una soluzione

$$y = y(x), \quad (2.13)$$

con condizioni iniziali $y(x_0) = x_0$.

Dovendo essere la (2.13) soluzione del problema avremo che:

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad \forall x \in I = [a, b]. \quad (2.14)$$

Quindi il punto iniziale è un punto dell'insieme $A : (x_0, y_0) \in A$.

Allora il problema sta nella ricerca di un integrale il cui diagramma sia contenuto nell'insieme A ed inoltre debba passare per il punto (x_0, y_0) (condizione iniziale).

Integriamo la (2.14):

$$\int_{x_0}^x y'(t) dt = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt, \quad \forall x \in [a, b].$$

Il primo integrale è quello della derivata:

$$|y(t)|_{x_0}^x = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt, \quad \forall x \in [a, b].$$

Da cui

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt, \quad \forall x \in [a, b]. \quad (2.15)$$

Allora se $y(x)$ è una soluzione del problema di Cauchy, esso deve verificare la (2.15) e viceversa.

La (2.15) si chiama equazione di Volterra¹⁵. Notiamo che nella (2.15) la funzione incognita compare sotto il segno di integrale mentre la variabile x è nell'intervallo di integrazione.

Ebbene questo è un problema di punto fisso. Infatti, supponiamo di ambientare il problema espresso dalla (2.15) nello spazio $C^0[a, b]$, cioè uno spazio vettoriale, costituito da funzioni continue in un intervallo $[a, b]$. Le funzioni inoltre sono limitate, per cui ad esse è applicabile il Teorema di Weierstrass. In questo spazio introduciamo una norma, pertanto esso diventa uno spazio normato. Inoltre supponiamo che tale norma generi una metrica e che tale metrica, a sua volta, generi una topologia. Allora lo spazio che abbiamo ipotizzato è uno spazio normato, metrico, vettoriale, topologico.

In tale spazio una corrispondenza è data da:

$$F: y \in C^0[a, b] \rightarrow \varphi.$$

Quindi F è una funzione continua che associa un'altra funzione continua: φ . Pertanto anche φ sarà un elemento di $C^0[a, b]$ e precisamente

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt, \forall x \in [a, b]. \quad (2.16)$$

Pertanto, poiché φ è il corrispondente di F , allora

$$\varphi = F(y). \quad (2.17)$$

Notiamo che F parte da $C^0[a, b]$ e va a finire in $C^0[a, b]$. All'inizio di questo paragrafo abbiamo fatto una traslazione ed una rotazione di piani $R^2 \rightarrow R^2$ ora invece abbiamo che $C^0 \rightarrow C^0$. Allora la (2.15) la possiamo anche scrivere come segue:

¹⁵ Vito Volterra, matematico e fisico italiano, 1860-1940.

$$y(x) = \varphi(x), \forall x \in [a, b], \quad (2.18)$$

cioè il problema di Cauchy si sintetizza nella (2.18). Ma stante la (2.17), la (2.18) la possiamo anche scrivere come

$$y = \varphi \text{ e cioè } y = F(y).$$

Quindi la soluzione che cerchiamo, relativamente al problema di Cauchy, si riduce a determinare il punto fisso della funzione F , cioè, trovare un elemento y di $C^0[a, b]$ che coincida con la sua immagine ($F(y)$), sempre in $C^0[a, b]$.

Generalizziamo, ora, il problema. A tal fine consideriamo un insieme qualunque S .

Consideriamo una funzione F di S , cioè una funzione

$$F : S \rightarrow S.$$

Il problema, allora, è quello di stabilire se esiste un elemento di S , diciamo x_0 , la cui immagine coincida con se stesso:

$$F(x_0) = x_0. \quad (2.18a)$$

Ebbene, se esiste un tale elemento diremo che esso è il punto fisso di F .

La soluzione della (2.18a) la si affronta con un procedimento iterativo. Ovviamente dobbiamo supporre che sia nota la funzione F . In tal caso scelto un punto iniziale $x_0 \in S$ possiamo calcolarci $F(x_0) \in S$, cioè una corrispondenza di $S \rightarrow S$. Poniamo, pertanto

$$F(x_0) = x_1.$$

Successivamente calcoliamo il corrispondente di x_1 , cioè $x_1 \Rightarrow F(x_1)$ otteniamo $F(x_1) = x_2$ e così di seguito, $F(x_2) = x_3 \dots$.

Otteniamo così una successione che verificherà l'uguaglianza:

$$F(x_{n-1}) = x_n, \forall n \in N, \{x_n\} \in S$$

con $\{x_n\}$ successione di elementi di S .

Questo metodo lo chiamiamo Metodo delle Approssimazioni Successive. Ricordiamoci che il nostro scopo è quello di risolvere il seguente problema di punto fisso

$$F(x) = x.$$

Supponiamo, allora, che la successione $\{x_n\}$ sia convergente, cioè

$$\lim x_n = x^* \text{ nello spazio topologico } (S, \mathcal{T})^{16}. \quad (2.19)$$

Stante la (2.19), per la definizione di limite, avremo che da un certo indice ν in poi, gli elementi della successione ricadranno nell'intorno, fissato, di x^* . Se la topologia è provvista di una metrica, l'approssimazione relativa alla convergenza può essere quantizzata ricorrendo al cerchio di raggio ε . Cioè, deve avvenire che la distanza d tra x_n ed x^* sia minore di un valore ε piccolo a piacere prefissato:

$$d(x_n, x^*) < \varepsilon.$$

Allora sarà

¹⁶ Ricordiamo che un limite ha senso soltanto se esso è riferibile ad una topologia.

$$\lim F(x_{n-1}) = \lim x_n, \forall n \in N. \quad (2.20)$$

Poiché F è supposta continua possiamo scambiare l'operazione di limite e stante la (2.19) possiamo scrivere la (2.20) come segue

$$F(\lim x_{n-1}) = x^*$$

cioè

$$F(x^*) = x^*,$$

dove x^* è il punto fisso cercato per F .

Pertanto possiamo concludere che se siamo in presenza di una funzione continua convergente in uno spazio topologico allora il limite della funzione è proprio il suo punto fisso.

2.5 Wavelet e caos

Si procede ora con una descrizione degli strumenti utilizzati per il monitoraggio di sistemi dinamici oggetto della presente ricerca.

2.6 Mappa di Poincaré

Una tecnica impiegata quando si ha a disposizione una sola variabile misurata (nel nostro caso il segnale accelerometrico) è quella di rappresentarla nello *spazio di embedding* o *pseudo-fasi*. Sebbene questa tecnica di rappresentare le orbite è molto impiegata, il *plot* di sistemi continui finisce col fornire poca informazione. In tal caso occorre ricorrere ad una tecnica di rappresentazione del piano delle fasi modificata chiamata *mappa di Poincaré*.

Ricordiamo che l'analisi diretta dello spettro di Fourier non è di grande aiuto se non si possono osservare cambiamenti nella sua composizione al variare

dell'ampiezza e/o della frequenza dell'azione forzante generatrice indiretta delle vibrazioni.

Pertanto, quando il moto è forzato di periodo T , una regola naturale di campionamento per ottenere una mappa di Poincaré è quella di scegliere $t_n = nT + \tau_0$. Questo consente di distinguere tra moti periodici e non-periodici.

Per esempio, se il moto armonico campionato, è sincronizzato con il suo periodo la mappa sarà formata da un solo punto fisso (Fig. 2.11).

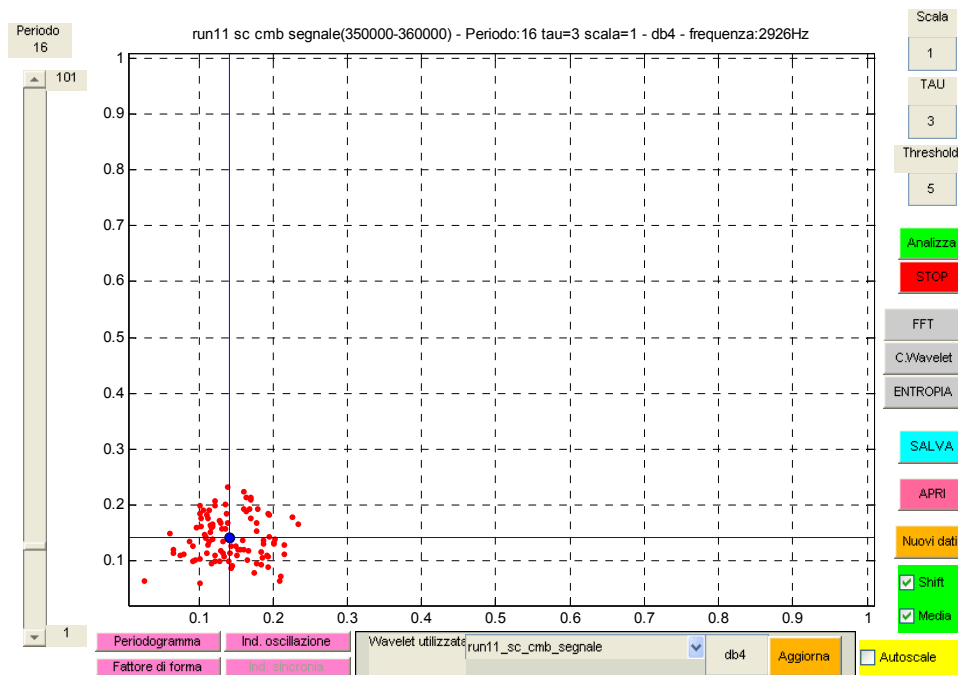


Fig. 2.11 - Moto armonico campionato e sincronizzato con il suo periodo

Un'altra mappa di Poincaré non-caotica è mostrata in Fig. 2.12 dove il moto consiste di 2 frequenze tra loro incommensurabili.

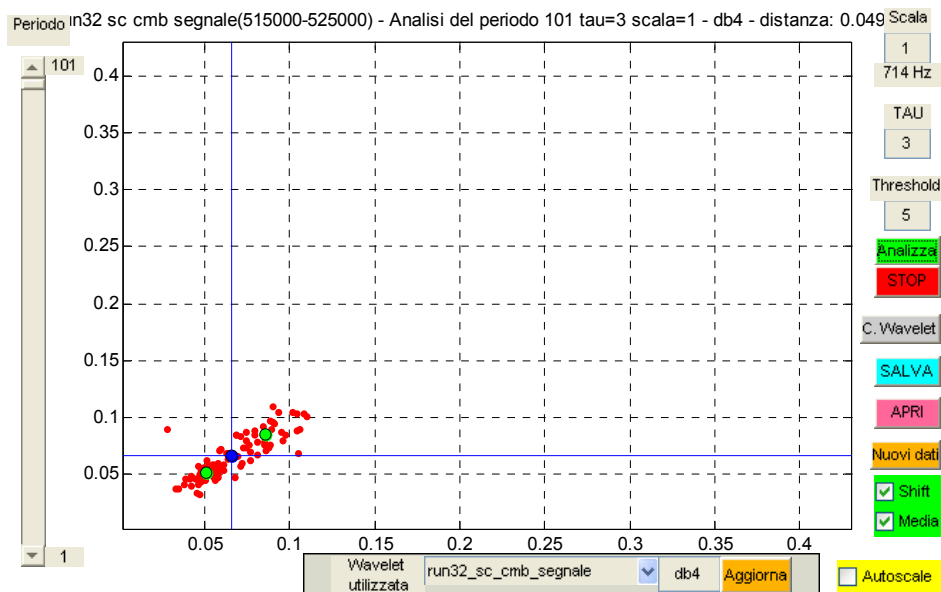


Fig. 2.12 – Esempio di mappa di Poincaré dove il moto consiste di due frequenze incommensurabili

Infine, se la mappa di Poincaré non mostra o un insieme finito di punti fissi o un'orbita chiusa il moto può essere considerato caotico.

2.7 Proprietà del piano delle fasi

Le proprietà geometriche della rappresentazione delle fasi di un sistema dinamico può essere espressa quantitativamente utilizzando misure che riflettano in ultima analisi la dinamica del sistema stesso. Più grande è la dimensione di un attrattore più complicato esso appare nello spazio delle fasi. È importante distinguere tra la dimensione dello spazio delle fasi (*embedding dimension*) e la dimensione dell'attrattore. La embedding dimension (p) è la dimensione dello spazio delle fasi che contiene l'attrattore ed è sempre un intero positivo. La dimensione dell'attrattore (D) può non essere un intero. D è direttamente correlato al numero di variabili del sistema ed inversamente correlato all'eventuale relazione che le lega.

Secondo Takens¹⁷ la embedding dimension p può essere calcolata come

¹⁷ Takens, F., Detecting strange attractors in turbulence, in Dynamical systems and turbulence, Lecture notes in mathematics, Eds. D.A. Rand & L.S. Young, Springer-Verlag, Heidelberg, pp. 366-381, 1981.

$$p = (2D + 1)$$

al fine di racchiudere un attrattore in uno spazio delle fasi.

La misura più impiegata per stimare D è la dimensione di correlazione dello spazio delle fasi (ν).

Metodi per calcolare la dimensione di correlazione sono descritti da Mayer e Kostelich^{18,19}.

Un attrattore caotico è un attrattore dove, mediamente, orbite che si originano da condizioni molto simili (punti molto vicini nello spazio delle fasi) divergono esponenzialmente molto rapidamente (*expansion process*); essi rimangono vicini solo per un breve periodo di tempo. Se queste orbite provengono da un attrattore di dimensione finita, esse collasseranno man mano che il processo evolve (*folding process*). Il risultato di questi due processi è una struttura a strati.

Le misure che quantizzano la caoticità di un attrattore sono la entropia (K) di Kolmogorov e gli esponenti di Lyapunov^{20,21}. Un attrattore per essere definito caotico dovrà avere l'entropia K o il massimo degli esponenti L_{\max} di Lyapunov positivi. L'entropia di Kolmogorov (Sinai o metrica) misura l'incertezza circa il futuro stato del sistema nello spazio delle fasi nota l'informazione circa gli stati precedenti (le posizioni o i vettori nello spazio delle fasi). Gli esponenti di Lyapunov misurano il tasso medio di espansione e collassamento che si registra lungo le auto-direzioni locali all'interno di un attrattore nello spazio delle fasi. Se lo spazio delle fasi ha dimensione p , possiamo stimare teoricamente fino a p esponenti di Lyapunov. Comunque, soltanto $([D] + 1)$ di essi saranno reali.

Vari metodi sono stati proposti al fine di misurare tali parametri. La stima del più grande valore degli esponenti di Lyapunov in un sistema caotico è stato

¹⁸ Mayer-Kress, G. editor, Dimension and entropies in chaotic systems, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

¹⁹ Kostelich, E.J., Problems in estimating dynamics from data, Physica D, vol. 58, pp. 138-152, 1992.

²⁰ Oseledec, A., A multiplicative ergodic theorem-Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems, IEEE Int. Conf. ASSP, vol. 19, pp. 179-210, 1992.

²¹ Walters, P., An introduction to ergodic theory, Springer graduate text in Mathematics, vol. 79, Springer-Verlag, Berlin, 1982.

dimostrato essere il più affidabile e riproducibile rispetto agli altri esponenti in particolar modo quando D cambia nel tempo in caso di dati non stazionari.

2.8 Esponenti di Lyapunov²²

Consideriamo la seguente equazione iterativa

$$x_{n+1} = kx_n(1 - x_n). \quad (2.21)$$

Essa genera una successione non lineare di termini che appartengono ad una parabola. La (2.21) tecnicamente rappresenta, in ambito geometrico, una mappa funzionale²³ cioè una corrispondenza di tipo non lineare tra lo stato di un sistema all'istante n e nell'istante successivo $n + 1$. Se intendiamo verificare l'esistenza di almeno un punto fisso, chiamiamolo x^* , dobbiamo imporre la condizione, per quanto detto in precedenza,

$$x^* = kx^*(1 - x^*)$$

da cui

$$x^* = \frac{k-1}{k}. \quad (2.22)$$

Allora ritorniamo alla mappa funzionale (2.21) $F : R \rightarrow R$ monodimensionale ponendo $k = 4$:

$$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n).$$

²² Alcuni autori lo riportano con il nome Liapunov.

²³ In ambito matematico si chiama funzione o applicazione mentre quando si trattano spazi vettoriali si preferisce parlare di mappa.

Essa, stante la (2.22), così come è anche verificabile geometricamente, presenta un punto fisso in $x^* = 0.75$. Ci chiediamo se esso è asintoticamente stabile, cioè intendiamo verificare se da qualunque punto del suo intorno si parta la traiettoria tende asintoticamente ad un equilibrio in $x^* = 0.75$.

Per verificare quanto sopra, consideriamo un semplice sistema discreto di ordine unitario (mappa mono-dimensionale) definita come segue:

$$x_{n+1} = f(x_n). \quad (2.23)$$

Inoltre, supponiamo di conoscere una sua possibile traiettoria e quella descritta da un punto vicino (Fig. 2.13).

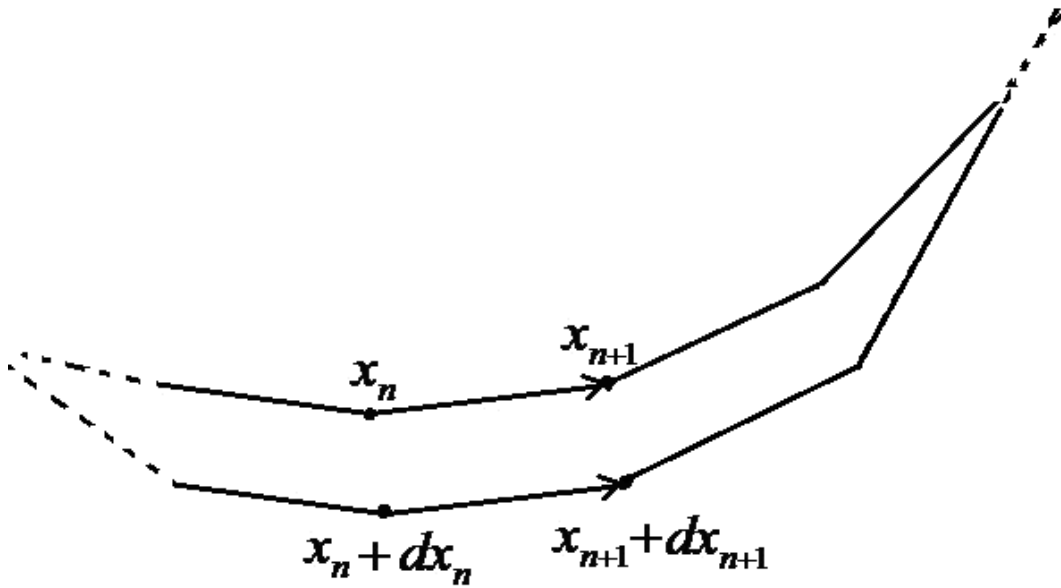


Fig. 2.13

Se i punti considerati appartengono ad un intorno molto piccolo e se consideriamo due istanti molto vicini allora possiamo indicare nell'istante n i punti come $x_n, x_n + dx_n$ mentre nell'istante $n+1$ come $x_{n+1}, x_{n+1} + dx_{n+1}$. Ci proponiamo di valutare il tasso medio di convergenza o divergenza esibito dai due punti nel passare da n ad $n+1$.

Avendo ipotizzato differenze infinitesime possiamo scrivere, stante la (2.23)

$$x_{n+1} - (x_{n+1} + dx_{n+1}) = f(x_n) - f(x_n + dx_n)$$

cioè

$$\begin{aligned} x_{n+1} - (x_{n+1} + dx_{n+1}) &= f(x_n) - f(x_n + dx_n) = \\ &= \frac{f(x_n) - f(x_n + dx_n)}{[x_n - (x_n + dx_n)]} [x_n - (x_n + dx_n)] \end{aligned} \quad (2.24)$$

Ora, in forma differenziale, la (2.24) può anche essere scritta come segue:

$$x_{n+1} - (x_{n+1} + dx_{n+1}) = f'(x_n) [x_n - (x_n + dx_n)] \quad (2.25)$$

Ne segue che $f'(x_n)$ può essere inteso come il tasso di espansione o contrazione esibito dalle due traiettorie passando da n ad $n+1$.

Il ragionamento può essere reiterato al fine di trovare una legge generale che valga per un qualsiasi numero consecutivo di istanti. Proviamo a vedere cosa succede se prendiamo in considerazione gli istanti che vanno da n ad $n+1$ fino ad $n+2$.

La (2.25) con riferimento agli istanti $n+1$, $n+2$ sempre per spostamenti infinitesimi diventa

$$x_{n+2} - (x_{n+2} + dx_{n+2}) = f'(x_{n+1}) [x_{n+1} - (x_{n+1} + dx_{n+1})] \quad (2.26)$$

che, stante la (2.25), può essere riscritta come

$$x_{n+2} - (x_{n+2} + dx_{n+2}) = f'(x_{n+1}) f'(x_n) [x_n - (x_n + dx_n)] \quad (2.27)$$

La (2.27) può, pertanto, essere generalizzata scegliendo un numero $m > n$ di istanti infinitesimi:

$$x_{n+m} - (x_{n+m} + dx_{n+m}) = f'(x_{n+m-1})f'(x_{n+m-2}) \cdots f'(x_n) [x_n - (x_n + dx_n)] \quad (2.28)$$

Ebbene, il tasso medio di espansione o contrazione delle traiettorie è dato dalla media geometrica delle derivate prime:

$$\Lambda = [f'(x_{n+m-1})f'(x_{n+m-2}) \cdots f'(x_n)]^{1/m} = \left[\prod_{j=1}^m f'(x_{n+m-j}) \right]^{1/m} \quad (2.29)$$

La (2.29) può essere estesa anche sui tempi lunghi, in tal caso essa diventa, nell'ipotesi che si parta dall'istante generico n :

$$\Lambda_{x_n} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left[\prod_{j=1}^m f'(x_{n+m-j}) \right]^{1/m} \quad (2.30)$$

Infine, nell'ipotesi di spostamenti infinitesimi la (2.30) diventa

$$\delta(x_{n+m}) = \Lambda_{x_n}^m \delta(x_n) \quad (2.31)$$

ovvero

$$\delta(x_{n+m}) \rightarrow e^{\lambda_{x_n}^m} \delta(x_n) \quad (2.32)$$

dove

$$\lambda_{x_n} = \ln(\Lambda_{x_n}) \quad (2.33)$$

rappresenta l'esponente di Lyapunov relativo alle traiettorie infinitamente vicine che partono da un istante qualsiasi n fino all'istante m ²⁴.

Tale importante parametro consente di stabilire il comportamento medio di traiettorie comunque vicine, infatti possiamo sintetizzare il tutto come segue:

se $\lambda_{x_n} < 0$, le traiettorie prossime a quella che parte da x_n mediamente tendono ad avvicinarsi ad essa. Siamo in presenza di un punto fisso e l'orbita comunque è stabile. Gli esponenti negativi sono tipici di sistemi dissipativi

se $\lambda_{x_n} > 0$, le traiettorie prossime a quella che parte da x_n mediamente tendono ad allontanarsi da essa. L'orbita oltre ad essere instabile è anche caotica

se $\lambda_{x_n} = 0$, esiste un punto fisso. Gli esponenti nulli sono tipici di sistemi conservativi.

Ora stante la (2.30), possiamo anche riscrivere la (2.33) come segue

$$\lambda_{x_n} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f'(x_{n+m-1})| + \ln |f'(x_{n+m-2})| + \cdots + \ln |f'(x_n)|}{m}, \quad (2.34)$$

osserviamo che l'esponente di Lyapunov ha la dimensione dell'inverso dell'unità di tempo (nel caso che m indichi il tempo). In realtà il parametro in oggetto misura la velocità media di divergenza o di convergenza di orbite che sono inizialmente molto vicine nello spazio delle fasi.

La (2.34) è l'espressione che ci siamo imposti di cercare ad inizio di questo paragrafo.

Vediamo con alcuni esempi il suo impiego per la determinazione tra punto di equilibrio e punto di equilibrio asintoticamente stabile.

²⁴ I simboli qui utilizzati non sono unificati o standardizzati come anche la base logaritmica.

Riprendiamo l'esempio della mappa funzionale (2.21) e che qui richiamiamo avendo posto $k = 4$:

$$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n). \quad (2.35)$$

Abbiamo già verificato che esiste un punto di equilibrio $x^* = 0.75$. Procediamo ora a determinare l'esponente di Lyapunov. Osserviamo preliminarmente che il problema è comunque mal condizionato avendo un fattore di amplificazione dei dati $C = 2$. Inoltre la derivata della (2.35) nel punto di equilibrio è data da

$$f'(x) = 4 - 8x \Rightarrow f'(x^*) = 4 - 8x^* = -2$$

ne consegue, stante la (2.34), che $\lambda_{x^*=0.75}^* = 0.1844$. Pertanto il sistema esibisce orbite instabili e caotiche, vale a dire che il punto $x^* = 0.75$ pur essendo un punto fisso per la mappa in oggetto, non è stabile asintoticamente.

La tabella che segue sintetizza le condizioni dinamiche della mappa in funzione del primo punto x_0 (*seed*) prescelto (Tab. 2.1).

Seed	Orbita
0.10	Instabile/Caotica
0.20	Instabile/Caotica
0.55	Instabile/Caotica
0.60	Instabile/Caotica

Tab. 2.1

L'esempio che segue illustra, invece, il caso di un punto di equilibrio asintoticamente stabile. La sua equazione è identica a quella dell'esempio precedente, ora, però, poniamo $k = 2.5$. Pertanto la mappa monodimensionale è la seguente:

$$x_{n+1} = 2.5x_n(1 - x_n). \quad (2.36)$$

Il punto fisso, stante la (2.22), è rappresentato da $x^* = 0.6$. La Fig. 2.14 che segue illustra il diagramma della mappa in oggetto e quello della retta bisettrice $y = x$ che consente di individuare graficamente il punto fisso.

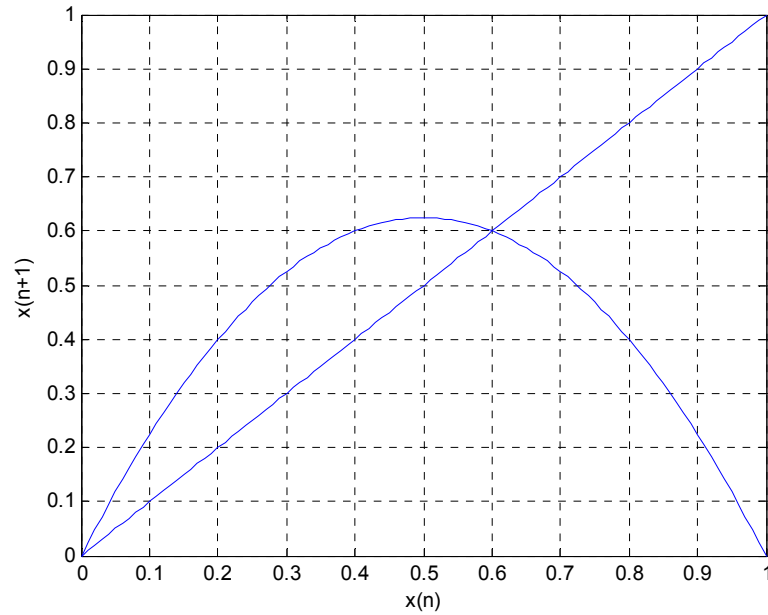


Fig. 2.14

Per l'esempio proposto abbiamo che la derivata della mappa calcolata nel punto fisso vale

$$f'(x) = 2.5 - 5x \Rightarrow f'(x^*) = -0.5$$

da cui immediatamente segue che $\lambda_{x^*=0.6} = -0.6931$. Pertanto questo punto fisso è asintoticamente stabile. La Fig. 2.15 che segue esemplifica quanto testé affermato e cioè che da qualunque punto dell'intorno di $x^* = 0.6$ ci si incominci a muovere la traiettoria tende asintoticamente ad un equilibrio, rappresentato proprio da $x^* = 0.6$.

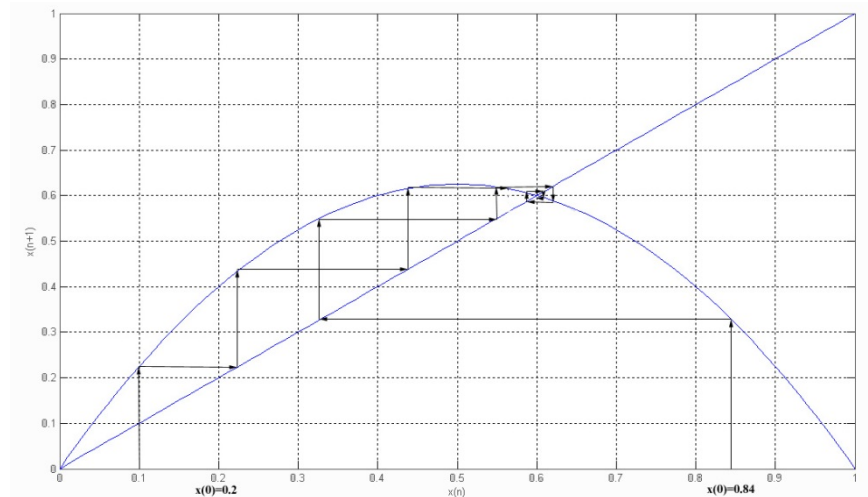


Fig. 2.15

L'esempio che segue, invece, esemplifica il caso in cui la traiettoria non tende mai ad un punto di equilibrio. La mappa a cui facciamo riferimento è mostrata in Fig. 2.16, ed è definita come segue²⁵:

$$x_{n+1} = \begin{cases} 2x_n & \text{se } x_n \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x_n) & \text{se } x_n > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2.37)$$

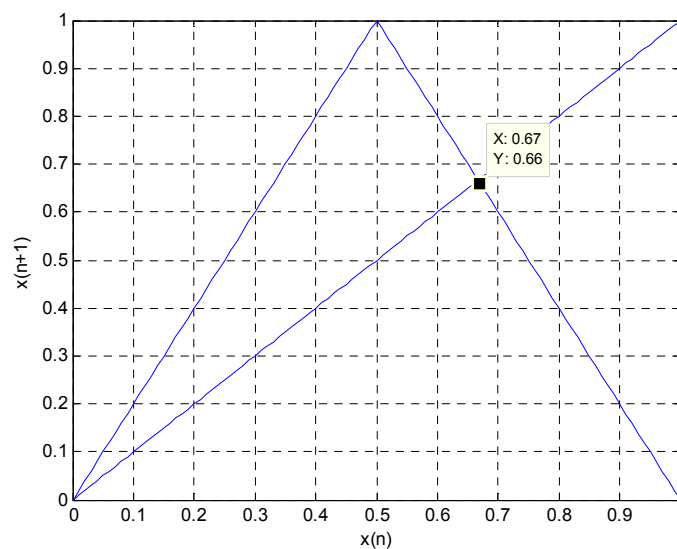


Fig. 2.16

²⁵ Essa è anche denominata mappa a "tenda" per la sua particolare forma che ricorda appunto una tenda.

Il punto fisso stante la (2.22) è dato da $x^* = 0.6667$ mentre, poiché la derivata è sempre pari a 2, l'esponente di Lyapunov risulta $\lambda = \ln(2) = 0.6931 > 0$. Essendo $\lambda > 0, \forall x_0 \in [0,1]$ allora qualunque traiettoria scegliamo non tenderà mai ad un punto di equilibrio così come bene esemplificato dalla Fig. 2.17 che segue.

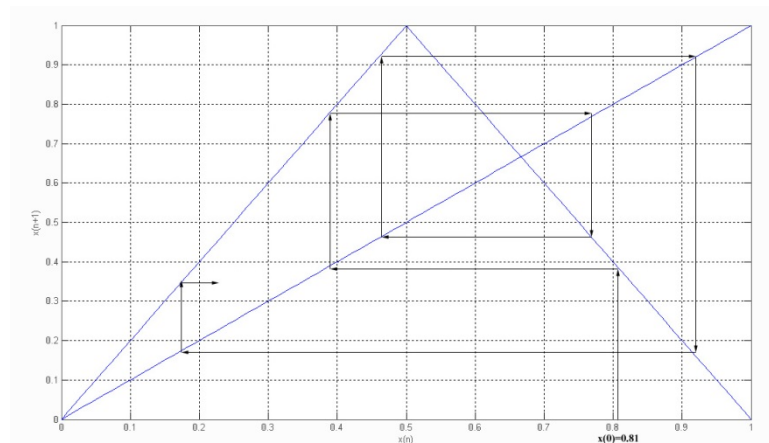


Fig. 2.17

Concludiamo il paragrafo con alcune osservazioni: sulla bisettrice $y = x$ di fatto si genera, per ogni traiettoria prescelta, una successione numerica che certamente tende ad un limite (punto di equilibrio asintotico) se la successione rispetta la condizione di sufficienza secondo Cauchy.

Segue dalla (2.32), dovendo essere $\delta(x_{n+m}) \rightarrow e^{\lambda_{x_n}^m} \delta(x_n)$, che la distanza tra due orbite, dopo un intervallo m , è cresciuta o meno mediamente secondo un fattore moltiplicativo uguale a $e^{\lambda_{x_n}^m}$. Inoltre, il tasso medio di espansione o contrazione delle orbite, Λ , è funzione del prodotto delle derivate nel punto x_n . Questo fatto indica la velocità con cui i punti vicini ad x_n si allontanano o si avvicinano dopo m iterazioni. Ne consegue che la migliore approssimazione lineare di una funzione differenziabile vicino ad un punto assegnato è rappresentata dalla matrice jacobiana. Se la traiettoria tende asintoticamente ad un punto di equilibrio allora $\lambda_{x_n}^m$ coincide con il logaritmo del modulo dello jacobiano.

Tutto ciò premesso possiamo ora procedere ad illustrare una serie di metodi per determinare se, assegnato un sistema dinamico, esso possa essere classificato come caotico. Una caratteristica di una tale famiglia di sistemi è quella che è legata alla dipendenza dalle condizioni iniziali. Il che significa che se due traiettorie in un determinato istante sono molto vicine, dopo un brevissimo intervallo di tempo, stante la (2.32) possono in media muoversi esponenzialmente, nel senso che possono allontanarsi ovvero avvicinarsi. Pertanto per un sistema tempo continuo possiamo dire che la (2.32) può anche scriversi in maniera più sintetica come segue:

$$\delta(t) = \delta(t_0)e^{\lambda t}, t \in R_0^+ \quad (2.38)$$

dove con $\delta(t_0)$ abbiamo indicato la distanza iniziale tra le due traiettorie.

La (2.38) può essere scritta con notazione analoga ma con riferimento a sistemi dinamici a tempo discreto come segue (Fig. 2.18):

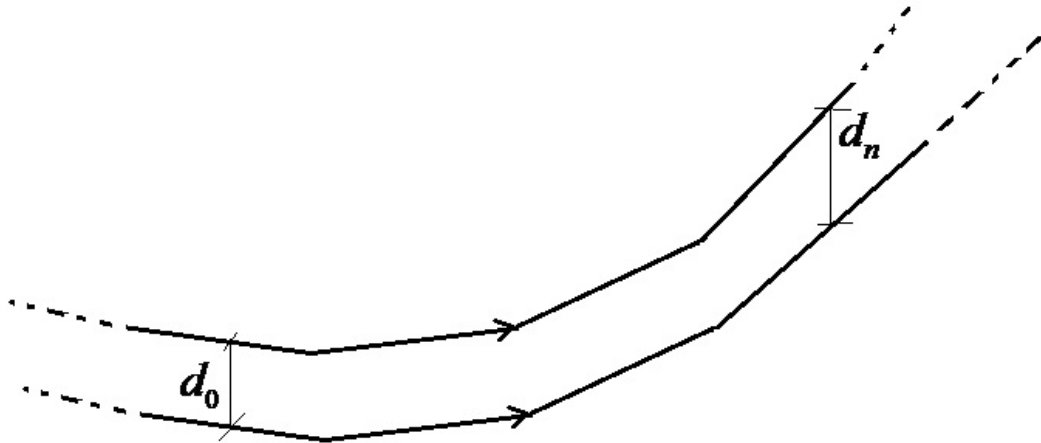


Fig. 2.18

$$d_n = d_0 e^{\lambda n}. \quad (2.39)$$

Osserviamo che la divergenza di un sistema caotico, se esso presenta una mappa limitata, non può procedere all'infinito. Pertanto quando ci riferiamo alla

(2.38) ovvero alla (2.39) dobbiamo intendere che esse hanno valore locale cioè per brevi intervalli temporali. Ebbene selezionata una traiettoria possiamo facilmente verificare il comportamento del rapporto

$$\frac{d(t)}{d(t_0)} \quad (2.40)$$

nell'intervallo prescelto $(t-t_0)$, piccolo a piacere. Possiamo in tal modo procedere, selezionando opportuni intervalli consecutivi, a determinare una successione finita di tali rapporti come di seguito indicata:

$$\left\{ \frac{d_1}{d_0}, \frac{d_2}{d_1}, \dots, \frac{d_n}{d_{n-1}} \right\}. \quad (2.41)$$

Dalla successione rappresentata dalla (2.41) possiamo ricavare la stima dell'esponente di Lyapunov come media rapportata all'intervallo temporale esaminato:

$$\lambda = \frac{1}{t_n - t_0} \sum_{j=1}^n \log \frac{d(t_j)}{d(t_{j-1})}. \quad (2.42)$$

Possiamo a questo punto affermare, almeno in prima battuta, che il sistema dinamico esaminato presenta caratteristiche caotiche se $\lambda > 0$, viceversa, se $\lambda < 0$ allora il suo andamento è regolare.

Riprendendo la mappa parametrica funzionale discreta

$$x_{n+1} = kx_n(1-x_n), \quad (2.43)$$

la determinazione degli esponenti di Lyapunov in funzione del parametro $0.1 \leq k \leq 4$ è illustrata in Fig. 2.19

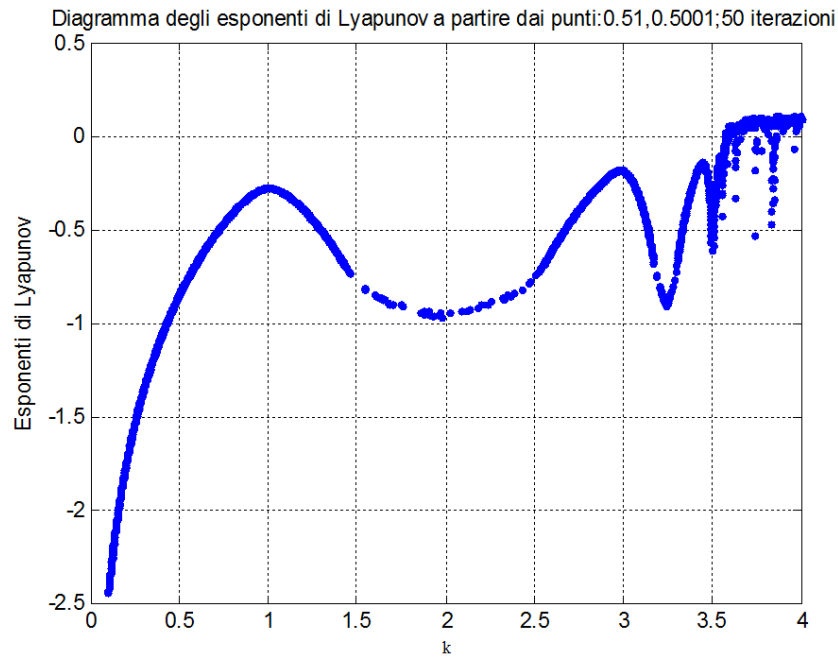


Fig. 2.19

In base alla densità di punti calcolati possiamo dire che il primo valore positivo dell'esponente di Lyapunov lo abbiamo per $k = 3.575$ in corrispondenza del quale abbiamo un $\lambda = 0.02159$ il cui diagramma è riportato in Fig. 2.20

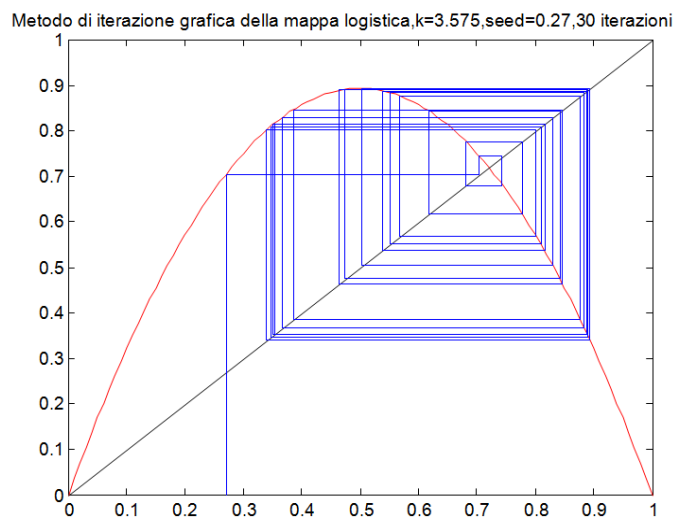


Fig. 2.20

Abbiamo visto come possiamo quantizzare la proprietà posseduta da alcuni particolari sistemi dinamici in merito alla forte sensibilità alle condizioni iniziali.

Con riferimento ad uno spazio delle fasi n -dimensionale si definiscono n esponenti di Lyapunov che in genere si ordinano in senso decrescente di "peso": $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$.

Se gli esponenti sono tutti negativi allora siamo in presenza di un sistema dinamico n -dimensionale dotato di un punto fisso detto anche attrattore.

Se almeno uno degli esponenti è positivo allora siamo in presenza di un regime caotico.

Diremo che siamo in presenza di un ciclo limite se il primo esponente è nullo e i restanti sono negativi, cioè $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_i < 0, 1 < i \leq n$.

Viceversa, un sistema dinamico avrà una evoluzione quasi-periodica e l'attrattore nello spazio delle fasi si chiama toro k -dimensionale, cioè $\lambda_i = 0, 1 \leq i \leq k$ e $\lambda_j < 0, k < j \leq n$.

2.9 Il calcolo degli esponenti di Lyapunov attraverso il problema degli autovalori ed autovettori

Abbiamo già sottolineato che un processo dinamico che evolve nel tempo in maniera caotica o non, comunque può essere analizzato attraverso lo studio delle distanze delle sue traiettorie a partire da un istante qualsiasi. Generalmente la rappresentazione grafica è quella riportata in Fig. 2.21

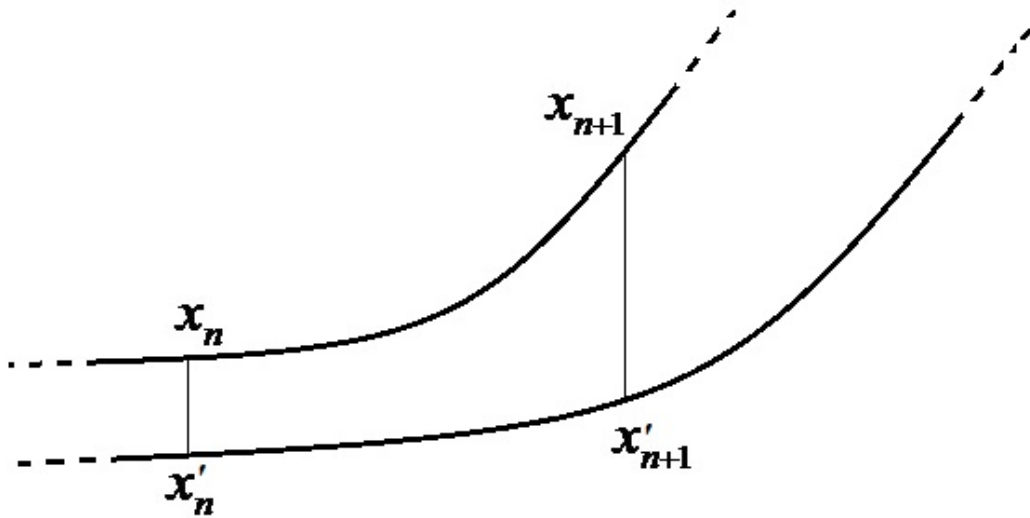


Fig. 2.21

Un sistema dissipativo n -dimensionale, ad esempio, tende a contrarre e a deformare l'iniziale ipersfera. In uno spazio tridimensionale una sfera si deforma in un ellissoide, in uno spazio bidimensionale un cerchio in un'ellisse.

Ad esempio, in uno spazio tridimensionale, un sfera inizialmente di raggio ρ dopo n unità di tempo diventa un ellissoide con assi principali rispettivamente di lunghezza $(\varepsilon_1^n \rho, \varepsilon_2^n \rho, \varepsilon_3^n \rho)$ di talché possiamo concludere che ad ogni sistema dinamico è associabile uno spettro di esponenti di Lyapunov $\{\lambda_i\}$, $\lambda_i = \ln \varepsilon_i$.

Sappiamo che in uno spazio monodimensionale le lunghezze variano con la seguente legge

$$d(t) \approx d_0 e^{\lambda_1 t}, \quad (2.44)$$

in uno spazio bidimensionale le aree variano con legge del tipo

$$A(t) = A_0 e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} \quad (2.45)$$

mentre in uno spazio tridimensionale i volumi variano con legge

$$V(t) = V_0 e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t} \quad (2.46)$$

e così di seguito.

Pertanto volendo generalizzare il problema possiamo dire che il cambiamento nel tempo dell'ipersfera dipende dalla derivata locale, cioè, se consideriamo una mappa m -dimensionale

$$\bar{x}_{n+1} = F(\bar{x}_n) \quad (2.47)$$

allora sarà fondamentale studiare la matrice Jacobiana associata al sistema dinamico. Ad esempio se

$$F = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$$

possiamo ricavare il seguente gradiente locale (o Jacobiano), supposto che la funzione sia derivabile,

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (2.48)$$

Dopo n iterazioni della mappa la ipersfera assumerà una forma che dipenderà dal prodotto dei primi n Jacobiani:

$$J_n = [J^n J^{n-1} \dots J^1] \quad (2.49)$$

Se ipotizziamo che gli intervalli temporali siano infinitamente piccoli tali cioè da poter ritenere linearizzabile il sistema dinamico allora possiamo ritenere lo Jacobiano un operatore lineare e quindi procedere a calcolare gli autovalori ad esso associati

Ciostante, gli autovalori di J_n saranno $j_1(n) \geq j_2(n) \geq \dots \geq j_m(n)$. Da cui possiamo ricavare gli esponenti di Lyapunov

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln j_i(n), i = 1, \dots, m. \quad (2.50)$$

Capitolo 3

Segnali random, richiami di statistica e metodologie di analisi

3.1 Generalità

Possiamo definire, in linea del tutto generale, **vibrazione** un qualsiasi moto oscillatorio posseduto da un corpo o da un sistema.

In particolare, se tale moto non è prevedibile è chiamato **random** (o anche aleatorio o stocastico). Gli esempi di moti random sono numerosi: il fumo di una sigaretta che si espande, una goccia di olio lasciata cadere in un bicchiere d'acqua, una piuma che volteggia in aria prima di adagiarsi al suolo, ecc. Anche un sistema che vibra con legge random subisce spostamenti che non sono prevedibili se riferiti alla sua storia evolutiva temporale.

Ad esempio in Fig. 3.1 è riportato un diagramma che potrebbe essere quello rilevato su un sistema che vibra con legge random.

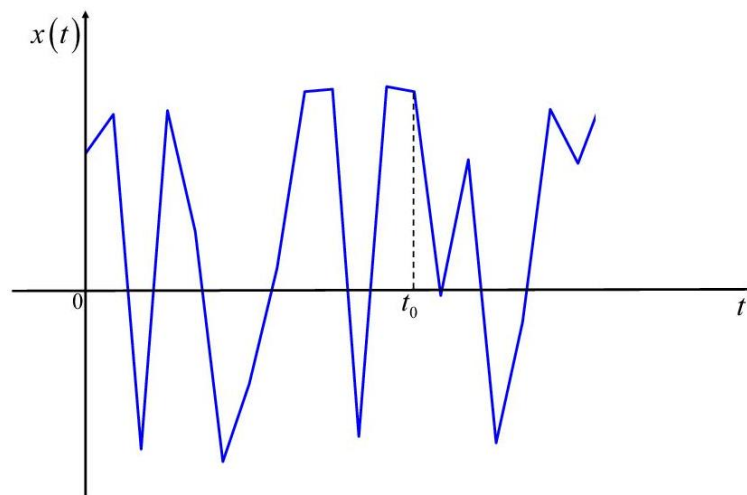


Fig. 3.1

Prevedere con certezza il valore del suo spostamento $x(t)$ all'istante t_0 cioè $x(t_0)$, è praticamente impossibile.

La legge del moto oscillatorio di un sistema può dipendere da molti fattori: le sue condizioni iniziali, l'ambiente in cui esso è collocato, le forze che agiscono su di esso o che interagiscono con l'ambiente circostante, ecc.

In tutti quei casi dove un moto oscillatorio è definibile random possiamo far ricorso, se siamo intenzionati a conoscere la sua evoluzione più probabile, alla statistica, o meglio, a quella branca che va sotto il nome di Analisi della Probabilità. Va da sé che random può essere il moto di un sistema (corpo), ma può esserlo anche la sollecitazione esterna a cui esso è sottoposto. Pertanto, in quanto segue, faremo sempre ipotesi precise in tal senso.

Incominciamo con lo studio del moto di un semplice sistema che per ora supponiamo privo di massa (ovvero avente massa trascurabile rispetto alle forze in campo). Supponiamo che esso descriva un moto stazionario (cioè di tipo deterministico) del tipo

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t), \quad (3.1)$$

dove x_0 è l'ampiezza massima dell'oscillazione che riteniamo costante, modulata secondo la funzione seno avente per argomento la pulsazione ω (rad/s) ed il tempo t (s). Possiamo anche dire che ωt rappresenta l'angolo, espresso in radianti, descritto dal fasore che si muove con velocità angolare ω dopo un tempo t . Per come è scritto, lo spostamento (o moto oscillatorio) esibito dal corpo è variabile con legge sinusoidale, pertanto con il trascorrere del tempo t in base alla legge (3.1) l'ampiezza istantanea $x(t)$ del corpo è "modulata" e può essere diagrammata come in Fig. 3.2

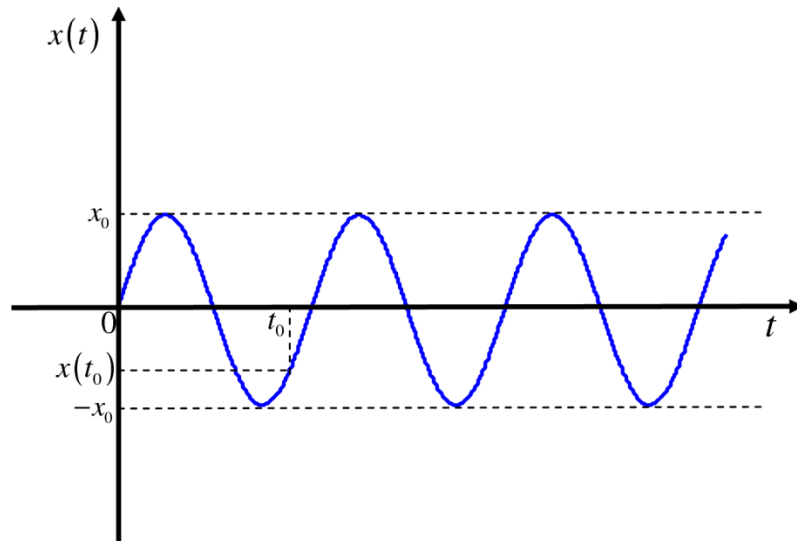


Fig. 3.2

Se volessimo conoscere l'ampiezza della sua oscillazione (o spostamento) nell'istante t_0 non dovremmo fare altro che inserire tale valore nella (3.1) per ottenere $x(t_0)$. Questo è un semplice esempio di moto stazionario (deterministico).

Fissiamo, ora, un periodo T (Fig. 3.3).

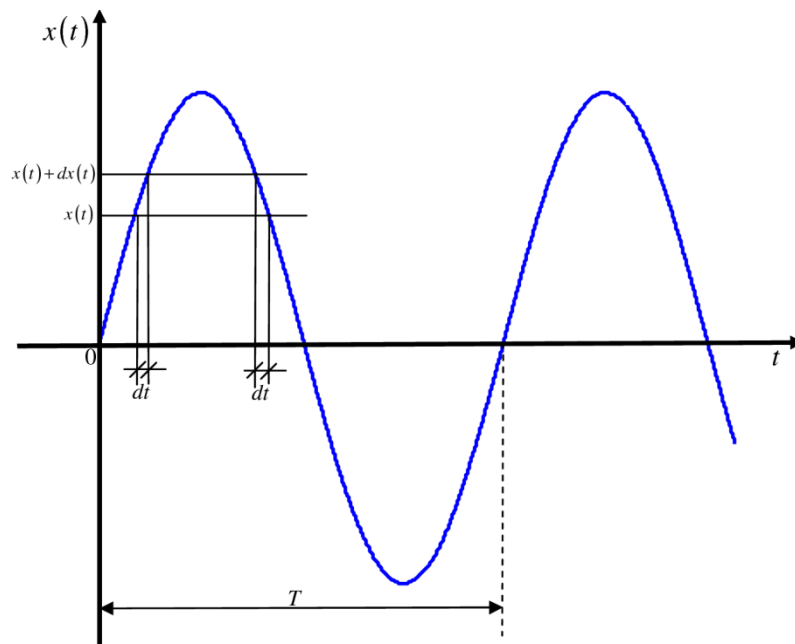


Fig. 3.3

Ci proponiamo di valutare il tempo elementare dt "speso" dal segnale $x(t)$ per passare, ad esempio, da $x(t)$ a $x(t) + dx(t)$ nel periodo T . A tal fine deriviamo la (3.1):

$$\frac{dx}{dt} = x_0 \omega \cos(\omega t) \quad (3.2)$$

Dalla (3.2) otteniamo l'intervallo di tempo elementare dt che ci siamo proposti di valutare:

$$dt = \frac{dx}{x_0 \omega \cos(\omega t)} \quad (3.3)$$

In realtà la (3.3) non è molto utile per i nostri fini in quanto è modulata dalla funzione coseno. Conviene, pertanto, esprimere la (3.3) in un'altra forma ricordando la relazione fondamentale della trigonometria:

$$\cos(\omega t) = \sqrt{1 - \sin^2(\omega t)} \quad (3.4)$$

otteniamo:

$$dt = \frac{dx}{x_0 \omega \sqrt{1 - \sin^2(\omega t)}} \quad (3.5)$$

Ricordando la (3.1) otteniamo:

$$dt = \frac{dx}{x_0 \omega \sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2}} \quad (3.6)$$

Pertanto, con riferimento ad un periodo T , la proporzione di tempo spesa dal segnale $x(t)$ nell'intervallo $[x(t), x(t) + dx(t)]$ è data da:

$$\frac{2dt}{T} = \frac{2dx}{T\omega\sqrt{(x_0^2 - x^2)}} \quad (3.7)$$

Ricordando che $T = 2\pi/\omega$ la (3.7) infine diventa:

$$\frac{dt}{T} = \frac{dx}{2\pi\sqrt{(x_0^2 - x^2)}} \quad (3.8)$$

Fin qui l'aspetto matematico-deterministico del problema. Introduciamo, ora, una visione del problema di tipo probabilistico. Per fare ciò ci chiediamo qual è la probabilità che, fissato nel periodo T un istante, diciamo t_0 , il nostro sistema, supposto privo di massa, possa occupare l'intervallo $x(t) \leq x(t_0) \leq x(t) + dx(t)$, con $0 \leq t \leq T$. In altri termini ci proponiamo di valutare quanto vale la probabilità:

$$\Pr(x(t) \leq x(t_0) \leq x(t) + dx(t)) = p(x)$$

dopo aver fissato t_0 , e supposto che l'evento "possa" verificarsi. In linea di principio possiamo ritenere che la probabilità cercata dipenda da quanto tempo $x(t)$ "spende" nell'intervallo $[x(t), x(t) + dx(t)]$. La relazione (3.8), pocanzi ricavata, in realtà ci consente di pervenire a tale determinazione. Possiamo perciò porre, stante la (3.8):

$$p(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{(x_0^2 - x^2)}} dx, \text{ dove stante la (3.1), } -x_0 \leq x \leq +x_0 \text{ e } 0 \leq t \leq T. \quad (3.9)$$

La (3.9) è chiamata **funzione densità di probabilità** (Fig. 3.4) ed essa è relativa alla funzione riportata in Fig. 3.3.

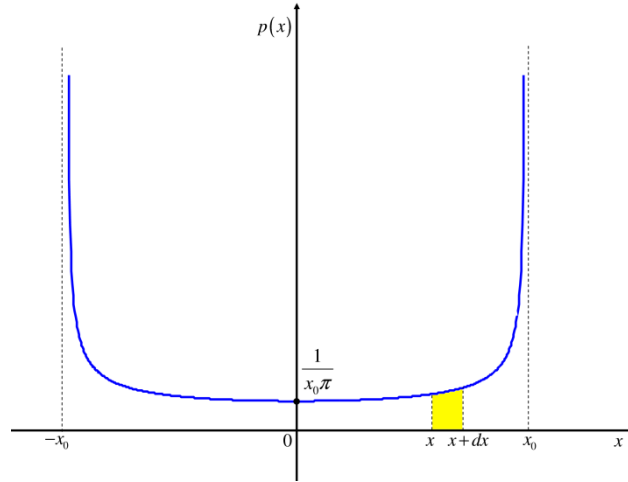


Fig. 3.4

Come si nota l'ampiezza x può variare tra $-x_0$ ed x_0 al variare di t tra 0 e T . L'area tratteggiata in Fig. 3.4 è la probabilità di ritrovare $x(t)$ compreso tra x e $x + dx$, essendo t un istante temporale qualsiasi. Pertanto

$$\Pr(x \leq x(t_0) \leq x + dx) = p(x) dx \quad (3.10)$$

è una importante relazione che chiamiamo **funzione densità di probabilità del primo ordine**.

In generale la (3.10) può fornirci la probabilità che $-x_0 \leq x(t_0) \leq x_0$, ponendo:

$$\Pr(-x_0 \leq x(t_0) \leq +x_0) = \int_{-x_0}^{+x_0} p(x) dx = \int_{-x_0}^{+x_0} \frac{dx}{2\pi\sqrt{x_0^2 - x^2}} \quad (3.11)$$

Ovviamente, la probabilità che, assegnato un istante t qualsiasi, si abbia che $x(t)$ sia compreso nell'intervallo $[-\infty, +\infty]$ è pari ad 1. Perciò l'intera area sottesa alla Fig. 3.4 vale 1. È interessante diagrammare la Fig. 3.3 e Fig. 3.4 nel modo che segue (Fig. 3.5).

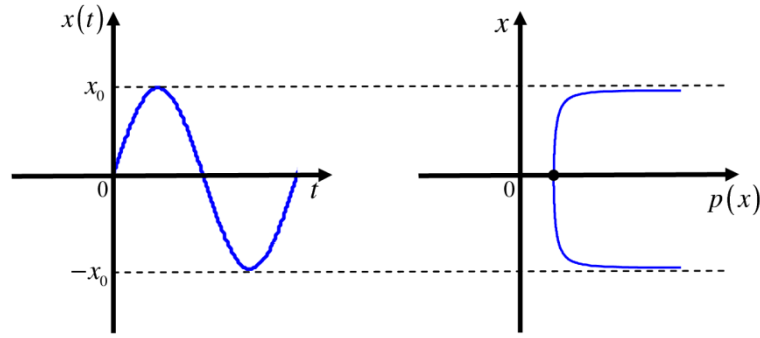


Fig. 3.5

Da essa si evince che la funzione seno relativamente al modello rappresentato dalla (3.1), "spende", in un periodo T , buona parte del suo tempo in corrispondenza dei suoi picchi. Pertanto è più probabile che ci possa capitare questa situazione se scegliamo casualmente un tempo $0 \leq t \leq T$.

Ciò premesso supponiamo ora di voler ripetere lo stesso ragionamento nel caso potessimo disporre del rilievo di una serie temporale random, come, ad esempio, quello riportato in Fig. 3.1. Volendo determinare la funzione di densità di probabilità di una tale serie, poiché il diagramma non è stazionario, potremmo tentare di calcolarci quanto vale la somma dei tempi elementari dt_i nei quali il diagramma ricade nell'intervallo prefissato $[x, x+dx]$, Fig. 3.6. In tal caso possiamo ritenere che:

$$\Pr(x \leq x(t) \leq x + dx) = p(x) dx = \frac{\sum_{i=1}^n dt_i}{T} \quad (3.12)$$

dove T è il tempo totale di osservazione a cui si riferisce il diagramma.

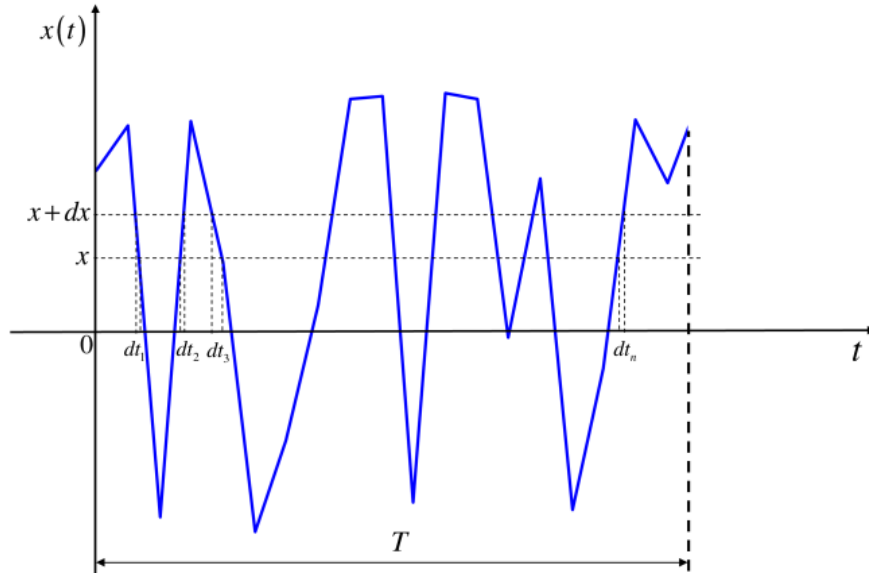


Fig. 3.6

In realtà, la frazione di tempo che rispetto al tempo totale T viene "spesa" dal diagramma nell'intervallo $[x, x + dx]$, può essere espressa dalla (3.12). Nel fare ciò occorre quindi definire il tempo T di osservazione, nonché i sottointervalli dt che devono rientrare nella (3.12), fissato l'intervallo $[x, x + dx]$.

Sappiamo, però, che anche se in linea teorica tutto quanto detto è fattibile, l'applicabilità della (3.12) è determinata dalla capacità di acquisizione di cui possiamo disporre in realtà.

Ricordiamo qui, che il segnale oscillatorio di un sistema è rilevabile attraverso accelerometri che convertono il segnale da analogico a digitale. Fatti salvi alcuni accorgimenti tecnici, quello che otteniamo è pur sempre un segnale discreto che quindi dipende da quanti campionamenti al secondo siamo capaci di effettuare. La (3.12), pertanto, a tal fine è più opportuno riscriverla come segue:

$$\Pr(x \leq x(t) \leq x + dx) = p(x) dx = \frac{\sum_{i=1}^m dn}{N} \quad (3.13)$$

essendo N l'ampiezza del campionamento e dn il campione elementare acquisito.

Una generalizzazione del problema è quella che si presenta allorquando vogliamo stabilire la probabilità $p(x|y)$, avendo assegnate due funzioni x ed y tra di loro indipendenti. Cioè, ci chiediamo quanto vale la probabilità che, ad esempio, supposto che y appartenga all'intervallo $[y, y + dy]$, x sia compreso nell'intervallo $[x, x + dx]$ (Fig. 3.7)?

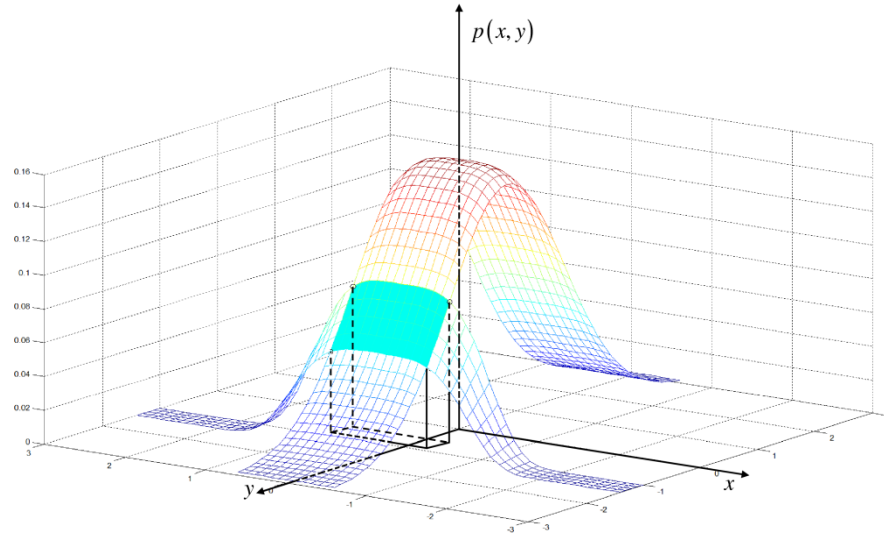


Fig. 3.7

La probabilità cercata è rappresentata dal volume elementare di Fig. 3.7. Infatti esso corrisponde alla probabilità che, dato $y \leq y \leq y + dy$, allora $x \leq x \leq x + dx$, cioè

$$p(x|y)dx = \frac{\text{volume elementare}}{\text{volume della striscia ombreggiata}}$$

vale a dire

$$p(x|y)dx = \frac{p(x, y)dx dy}{dy \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dx} \quad (3.14)$$

La (3.14) si può ulteriormente semplificare se poniamo:

$$p(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx ,$$

diventando

$$p(x|y) = \frac{p(x, y)}{p(y)} \quad (3.15)$$

La (3.15) è una relazione molto importante, da essa scaturisce che se x ed y sono due distribuzioni indipendenti allora $p(x|y) = p(x)$ e dalla (3.15)

$$p(x, y) = p(x) p(y) ,$$

vale a dire il prodotto di due funzioni densità di probabilità del primo ordine. La (3.15) è chiamata anche **probabilità condizionata** o **congiunta** di " x dato y ". Va da sé che

$$\Pr(-\infty \leq x(t_0) \leq +\infty \quad \wedge \quad -\infty \leq y(t_0) \leq +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx dy = 1 .$$

Così come pure

$$\Pr(x_1 \leq x(t_0) \leq x_2 \quad \wedge \quad y_1 \leq y(t_0) \leq y_2) = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} p(x, y) dx dy .$$

Così come la forma elementare è data da

$$\Pr(x \leq x(t_0) \leq x + dx \quad \wedge \quad y \leq y(t_0) \leq y + dy) = p(x, y) dx dy .$$

In tutti questi casi $p(x, y)$ è chiamata **funzione densità di probabilità del secondo ordine**.

3.2 Alcuni indicatori statistici

Riprendiamo la relazione (3.12):

$$\Pr(x \leq x(t) \leq x + dx) = p(x) dx = \frac{\sum_{i=1}^n dt_i}{T}$$

la quale, come detto, fornisce la probabilità $\Pr(x \leq x(t) \leq x + dx)$ nel caso di un processo random. La funzione $p(x)$ è chiamata **densità di probabilità**. In particolare possiamo scrivere la parte destra della (3.12) come:

$$p(x, dx) = p(x) dx \quad (3.16)$$

il che ci fa capire che la probabilità che il nostro processo $x(t)$ giaccia nell'intervallo dx (da x a $x + dx$) sia funzione di dx , nel senso che ci aspettiamo che per piccoli valori di dx la probabilità che $x(t)$ giaccia nell'intervallo suddetto sia proporzionale a dx , cioè l'ampiezza dell'intervallo stesso, da qui la (3.16).

Abbiamo detto che $p(x, dx)$ è la probabilità di trovare $x(t)$ in dx quando dx è piccolo, ebbene possiamo pensare, allora, di determinare la probabilità di trovare $x(t)$ in un intervallo qualsiasi, ad esempio da x_1 ad x_2 , dividendo l'intervallo in un numero infinitamente piccolo di incrementi Δx e valutando la somma dei termini $p(x) \Delta x$ per ogni incremento.

Possiamo quindi scrivere che (Fig. 3.8)

$$\Pr(x_1 \leq x(t) \leq x_2) = \sum p(x) \Delta x \quad (3.17)$$

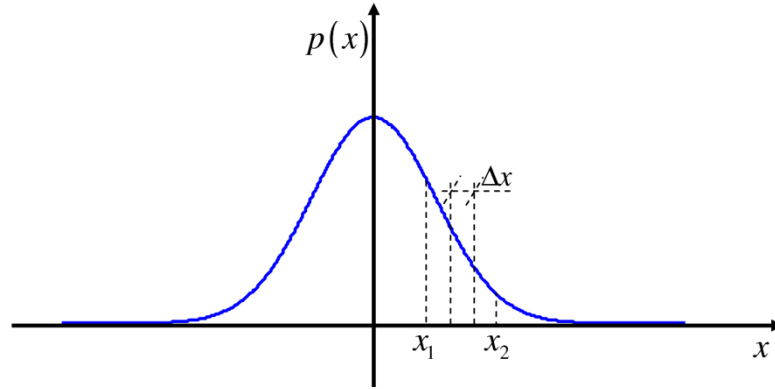


Fig. 3.8

Ovviamente più piccoli saranno gli incrementi Δx (tendenti a dx) tanto più preciso sarà il risultato della (3.17). Se, infine, integriamo la (3.17) otteniamo:

$$\Pr(x_1 \leq x(t) \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx \quad (3.18)$$

Ovviamente l'area sottesa alla curva $p(x)$ nel caso essa sia estesa a tutto l'intervallo $[-\infty, +\infty]$ vale 1:

$$\Pr(-\infty \leq x(t) \leq +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1 \quad (3.19)$$

La funzione di densità $p(x)$ più comune è quella che va sotto il nome di **gaussiana** o **normale**. Essa ha la seguente forma matematica:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (3.20)$$

dove m e σ sono due costanti, ed x è la variabile random (Fig. 3.9).

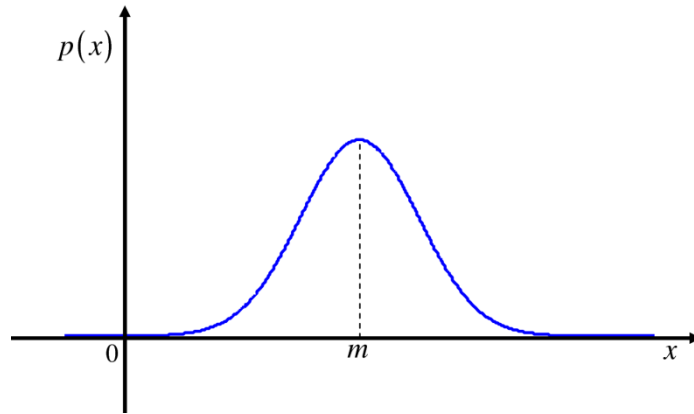


Fig. 3.9

Ora se $p(x)dx$ è la probabilità che x abbia un valore compreso nell'intervallo $[x, x + dx]$, allora il numero "atteso" (*expected*, E) $E[x]$ è dato da:

$$E[x] = \int x p(x) dx \quad (3.21)$$

Se vogliamo introdurre il valore medio atteso nell'intero intervallo $[-\infty, +\infty]$

$$E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx \quad (3.22)$$

La (3.22) è la definizione analitica del **valore medio $E[x]$** , e va intesa come estesa ad un numero infinito di processi random "equivalenti". Dalla (3.22) definiamo la **media quadratica**

$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx \quad (3.23)$$

nonché la **varianza σ^2** definita come

$$\sigma^2 = E[(x - E[x])^2] \quad (3.24)$$

e la **deviazione standard** σ

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \quad (3.25)$$

In particolare dalla (3.24), sviluppando il quadrato, ricaviamo che

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E\left[x^2 - 2xE[x] + (E[x])^2\right] = \\ &= E\left[x^2\right] - 2E[x]E[x] + (E[x])^2 = \\ &= E\left[x^2\right] - (E[x])^2 \Rightarrow \text{media quadratica} - (\text{media})^2 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Marginalmente notiamo che la (3.20) nel caso di funzioni multidimensionali, ad esempio del secondo ordine, per processi indipendenti diviene:

$$p(x, y) = \left(\frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} \right) \left(\frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}} \right) = p(x)p(y), \quad (3.27)$$

mentre nel caso di processi non indipendenti

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho_{xy}^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho_{xy}^2)}\left\{\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2} - 2\rho_{xy}\frac{(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y}\right\}} \quad (3.28)$$

dove

$$\rho_{xy} = \frac{E\left[(x-m_x)(y-m_y)\right]}{\sigma_x\sigma_y} \quad (3.29)$$

in cui m_x e m_y sono i valori medi di x e di y rispettivamente, σ_x^2 e σ_y^2 le varianze di x e di y rispettivamente. Notiamo che ρ_{xy} è chiamato **coefficiente di correlazione** o **covarianza normalizzata**. Nella (3.28) $\rho_{xy} = 0$ se i due processi x ed y sono ipotizzati essere indipendenti.

A proposito della definizione di probabilità abbiamo detto che lo studio di un processo può essere condotto sul singolo processo ovvero su un insieme di processi equivalenti che si sviluppano contemporaneamente o in epoche successive. In ogni caso, in realtà, per quanto possiamo essere rigorosi e precisi nell'effettuare tali prove (processi) esse non saranno mai identiche, bensì equivalenti, cioè non sempre il processo si ripete identicamente. Possiamo, in questi casi, soprattutto se il processo è random, effettuare statisticamente una media di quanto accade. In tal caso possiamo immaginare di avere una serie di processi $x_i(t)$, $i = 1, \dots, n$ come in Fig. 3.10.

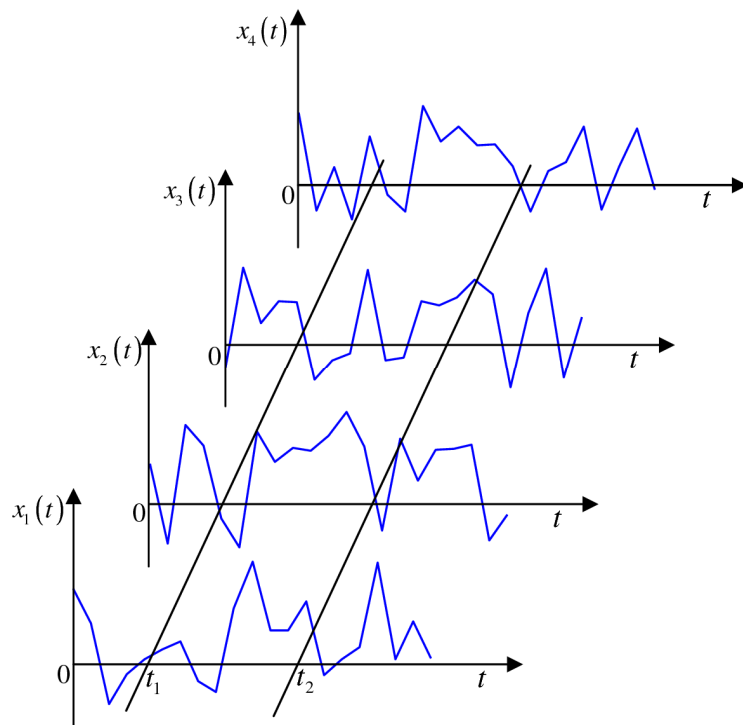


Fig. 3.10

Se fissiamo un istante t_1 , allora possiamo determinare la densità di probabilità del primo ordine $p_{t_1}(x)$, considerando cioè la distribuzione di

probabilità delle $x_i(t_1)$, $i = 1, \dots, n$. Analogamente se fissiamo un altro istante t_2 possiamo determinare la densità di probabilità del primo ordine $p_{t_2}(x)$, considerando cioè la distribuzione di probabilità delle $x_i(t_2)$, $i = 1, \dots, n$.

Infine possiamo determinare la densità di probabilità del secondo ordine $p_{t_1, t_2}(x)$, delle $x_i(t_1, t_2)$, $i = 1, \dots, n$. E così via aumentando l'ordine delle funzioni densità di probabilità. Nel caso di funzioni del primo ordine (processi indipendenti gaussiani) allora nella (3.20) $x(t)$ diventa $x(t_1)$ o $x(t_2)$ rispettivamente ed ovviamente sia m che σ possono assumere valori diversi, se riferiti agli istanti di cui sopra. Nel caso di eventi non indipendenti nella (3.28) dobbiamo porre $x = x(t_1)$ ed $y = y(t_1)$ rispettivamente. Analogamente per processi di ordine via via crescente.

Un processo lo definiamo **stazionario** se le funzioni di probabilità sono indipendenti dal tempo. Tali processi si distinguono in "**debolmente**" e "**strettamente**" stazionari. I primi si hanno allorquando soltanto le funzioni di primo e secondo ordine risultano indipendenti dal tempo, i secondi quando l'invarianza temporale è estesa alle funzioni di qualsiasi ordine.

Infine, un processo è chiamato **ergodico** se esso oltre ad essere stazionario ha anche la proprietà che qualsiasi campione noi prendiamo questi è rappresentativo del processo nel suo insieme.

Ci preme sottolineare il fatto ingegneristico che in realtà, in linea puramente teorica, per caratterizzare un processo dovremmo conoscere tutte le funzioni $x_i(t)$ che ne costituiscono il campione, la qual cosa è ovviamente impossibile, così come è impossibile ritenere che siano note le funzioni densità del primo e del secondo ordine in particolare. Il più delle volte, infatti, disponiamo di una sola osservazione sperimentale. In tal caso, se il processo ha un comportamento di tipo ergodico allora possiamo ritenere che la misurazione statistica di tale osservazione può essere rappresentativa del comportamento generale del processo. Notiamo ancora che per un processo ergodico una grandezza statistica può essere ricavata attraverso una media temporale effettuata su un qualunque intervallo del processo. In tal caso il processo è ergodico in media, nel senso che ogni esperimento

produce una media temporale di tipo variabile aleatoria, cioè ogni media è una quantità numerica che dipende dal risultato/realizzazione.

Pertanto le condizioni affinché un processo si possa definire ergodico sono:

1. Il valore atteso della variabile aleatoria deve essere uguale al valore medio del processo;
2. La varianza della stessa variabile deve essere nulla.

Ciò implica che tutte le funzioni campione devono presentare un valore medio temporale pari alla media dell'intero processo.

Riprendendo la Fig. 3.10, possiamo schematizzare quanto fin qui detto come in Fig. 3.11.

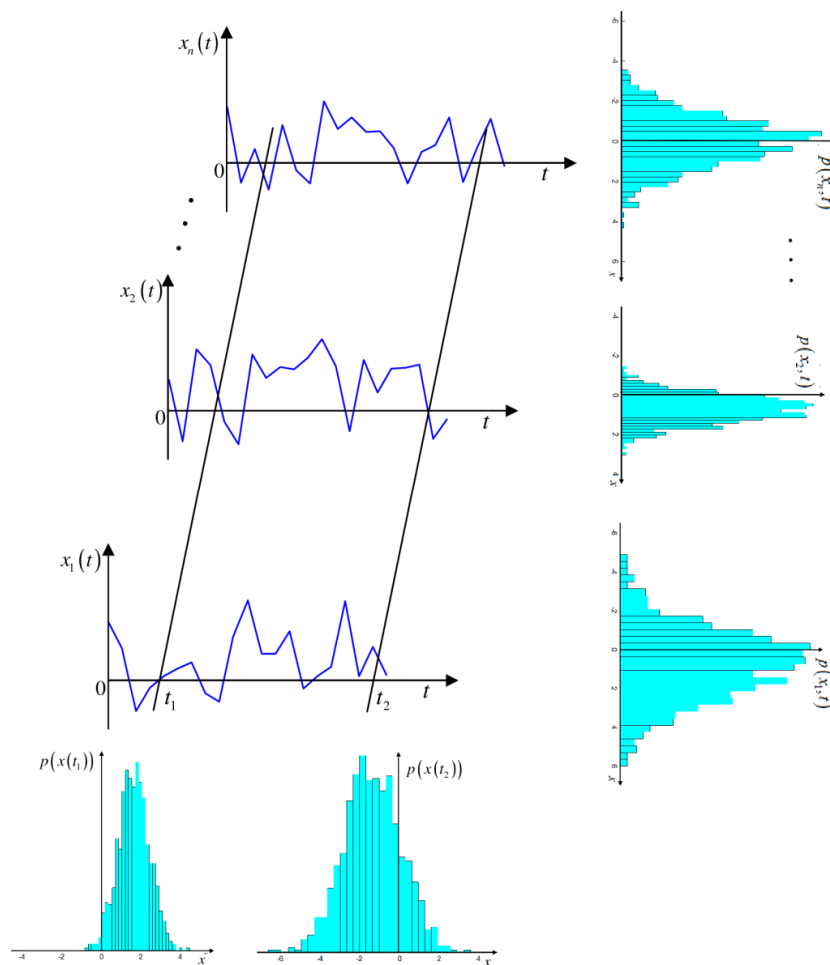


Fig. 3.11

Nella Fig. 3.11 è ben evidenziato il concetto di densità di probabilità che chiamiamo "along" e "across". Nel caso along la variabile aleatoria dipende dalla scelta della osservazione $x_i(t)$. Nel caso across la aleatorietà è funzione della scelta degli istanti temporali t_i .

3.3 Le funzioni di auto-correlazione e cross-correlazione

Supponiamo ora di voler studiare due processi stazionari del tipo:

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t) \quad \text{e} \quad y(t) = y_0 \sin(\omega t + \phi)$$

dove x_0 e y_0 sono le ampiezze dei due segnali e ϕ è una sfasatura costante.

Inoltre supponiamo che la funzione di densità di probabilità sia costante (t uniformemente distribuito) e valga, con riferimento ad un periodo completo $T = 2\pi/\omega$, $p(t_0) = \omega/2\pi$, avendo indicato con t_0 un istante qualsiasi del processo (Fig. 3.12).

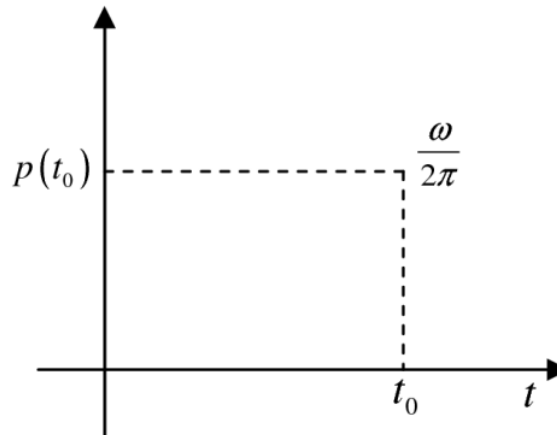


Fig. 3.12

Ebbene il valore medio atteso dei due processi è dato dal loro prodotto:

$$E[x(t_0)y(t_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x_0 y_0 \sin(\omega t_0 + \phi) p(t_0) dt_0 \quad (3.30)$$

Da cui, sostituendo il valore costante di $p(t_0)$, otteniamo

$$E[x(t_0)y(t_0)] = x_0 y_0 \left(\frac{\omega}{2\pi} \right) \int_0^{T=\frac{2\pi}{\omega}} \sin(\omega t_0 + \phi) dt_0$$

Sviluppando e semplificando otteniamo che:

$$E[x(t_0)y(t_0)] = \frac{1}{2} x_0 y_0 \cos(\phi) \quad (3.31)$$

Stante la (3.31), possiamo ricavare il coefficiente di correlazione dato dalla (3.29) dove ovviamente $m_x = m_y = 0$. Osservando che $\sigma_x = \frac{x_0}{\sqrt{2}}$ e $\sigma_y = \frac{y_0}{\sqrt{2}}$, otteniamo

$$\rho_{xy} = \cos(\phi). \quad (3.32)$$

L'esempio ora presentato fornisce una interpretazione più estensiva del concetto di correlazione. Non necessariamente esso deve essere di tipo lineare (retta dei minimi quadrati). La (3.32) conferma che allorquando la differenza di fase ϕ è pari a $\pi/2$ o $3\pi/2$ ne consegue che $\rho_{xy} = 0$, cioè i due processi sono in "quadratura", cioè incorrelati²⁶, mentre sono perfettamente correlati se $\phi = 0, \pi, 2\pi$. In particolare $\rho_{xy} = 1$ per $\phi = 0, 2\pi$ ovvero $\rho_{xy} = -1$ per $\phi = \pi$ "battimenti".

Sia ora un insieme formato da sequenze random come in Fig. 3.11. Definiamo **autocorrelazione** la funzione:

$$E[x(t)x(t+\tau)] \quad (3.33)$$

²⁶ Questa proprietà è fondamentale allorquando le funzioni trigonometriche trascendenti irrazionali seno e coseno vengono impiegate come basi funzionali (proiettori) nella serie trigonometrica di Fourier.

dove $x(t)$ è il processo campionato all'istante generico t mentre $x(t + \tau)$ è il processo campionato dopo un intervallo temporale pari a τ . Se il processo è aleatorio stazionario la funzione di autocorrelazione definita in (3.33) è indipendente dal tempo assoluto t ma dipenderà solo dalla scelta di τ . In tal caso abbiamo che:

$$E[x(t)x(t + \tau)] = f(\tau) = R_x(\tau) \quad (3.34)$$

Dalla (3.34) possiamo ricavare una serie di proprietà per la funzione di autocorrelazione nel caso di un processo stazionario. In particolare il coefficiente di correlazione ρ definito in (3.29) diventa:

$$\rho = \frac{E[(x(t) - m)(x(t + \tau) - m)]}{\sigma^2} \quad (3.35)$$

dove $\sigma_{x(t)} = \sigma_{x(t + \tau)} = \sigma$ e $E[(t) \cdot x(t + \tau)] = m$.

Dalla (3.35) ricaviamo anche che:

$$\rho = \frac{E[x(t)x(t + \tau)] - mE[x(t)] - mE[x(t + \tau)] + m^2}{\sigma^2}$$

da cui stante le posizioni scritte in precedenza otteniamo

$$\rho = \frac{R_x(\tau) - m^2}{\sigma^2} \quad (3.36)$$

Dalla (3.36) abbiamo che, poiché si dimostra che $-1 \leq \rho \leq +1$:

$$-\sigma^2 + m^2 \leq R_x(\tau) \leq \sigma^2 + m^2, \quad (3.37)$$

che rappresentano i valori entro cui può variare la funzione di autocorrelazione $R_x(\tau)$ per processi aleatori stazionari.

Analogamente possiamo definire la funzione **cross-correlazione** fra due diversi processi $x(t)$ ed $y(t)$ stazionari:

$$R_{xy}(\tau) = E[x(t)y(t+\tau)] \quad (3.38)$$

e

$$R_{yx}(\tau) = E[y(t)x(t+\tau)] \quad (3.39)$$

Poiché i processi sono supposti essere stazionari le (3.38) e (3.39) si possono anche scrivere come segue:

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau) \quad (3.40)$$

e

$$R_{yx}(\tau) = R_{xy}(-\tau) \quad (3.41)$$

In generale le funzioni $R_{xy}(\tau)$ e $R_{yx}(\tau)$ non sono le stesse ed inoltre non sono pari rispetto a τ . In più dalla (3.29) ricaviamo che:

$$R_{xy}(\tau) = \sigma_x \sigma_y \rho_{xy}(\tau) + m_x m_y \quad (3.42)$$

e

$$R_{yx}(\tau) = \sigma_y \sigma_x \rho_{yx}(\tau) + m_y m_x \quad (3.43)$$

Dalle (3.42) e (3.43) abbiamo anche che, poiché $-1 \leq \rho_{xy} \leq +1$:

$$-\sigma_x \sigma_y + m_x m_y \leq R_{xy}(\tau) \leq \sigma_x \sigma_y + m_x m_y \quad (3.44)$$

rappresentano i limiti della funzione di cross-correlazione per processi aleatori stazionari.

3.4 I Processi aleatori stazionari

Allorquando procediamo alla rilevazione dello stato vibrazionale, ad esempio, di un sistema meccanico, più o meno complesso, quello che otteniamo è una serie di valori che rappresentano la sequenza discreta di un fatto che, in realtà, evolve analogicamente cioè con una certa continuità. Il numero di rilievi che riusciamo a fare nell'unità di tempo (1s) prende il nome di campionamento (o *sampling rate*) e si misura in numero di punti al secondo (Hz), ovvero con terminologia anglosassone *frequency rate*.

Se dopo qualche istante riprendiamo l'acquisizione difficilmente otterremo gli stessi valori acquisiti nella precedente rilevazione, questo anche se il sistema meccanico è perfettamente stabile. Se reiteriamo questo ragionamento, possiamo diagrammare le sequenze $x_i(t)$ come in Fig. 3.11. Per quanto simili, le serie, se fissiamo un istante t_1 , presenteranno valori aleatori, questo anche nel caso disponessimo di una sequenza tachimetrica che consente di "allineare" i segnali temporalmente.

Qualunque istante t scegliamo, ricadente nell'intervallo di rilevazione, otteniamo sempre una **variabile aleatoria**. Il termine aleatorio, non deve necessariamente farci pensare ad un modello che non è rappresentabile attraverso funzioni matematiche.

Un processo aleatorio lo si può realizzare, infatti, anche attraverso una legge deterministica. Ad esempio

$$x(t) = a \cos(2\pi f_0 t + \phi) \quad (3.45)$$

dove a , f_0 sono costanti e ϕ , sfasatura, la ipotizziamo variabile uniformemente nell'intervallo $[0, 2\pi]$. In tale ipotesi ϕ diventa una variabile aleatoria che di conseguenza genererà sequenze aleatorie ogni qual volta facciamo ricorso alla funzione (3.45). É evidente, da quanto precede, che se volessimo caratterizzare statisticamente tutto il processo dovremmo conoscere per ogni istante t , in cui dura lo studio del sistema meccanico, la classe della funzione di probabilità. Impresa pressoché impossibile!

In questi casi possiamo fare ricorso ad indici statistici più semplici e più facili da calcolare. Un primo indice statistico, del primo ordine, è il **valore medio**

$$\eta_x(t) = E[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_x(x; t) dx, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.46)$$

Se fissiamo t otteniamo il valore medio del processo e quindi infinite variabili aleatorie di valore diverso. Nella (3.46) con $f_x(x, t)$ abbiamo indicato la funzione di densità di probabilità del primo ordine del processo $X(t)$. Attraverso la (3.46) possiamo pertanto ottenere un processo che possiamo definire medio (Fig. 3.13).

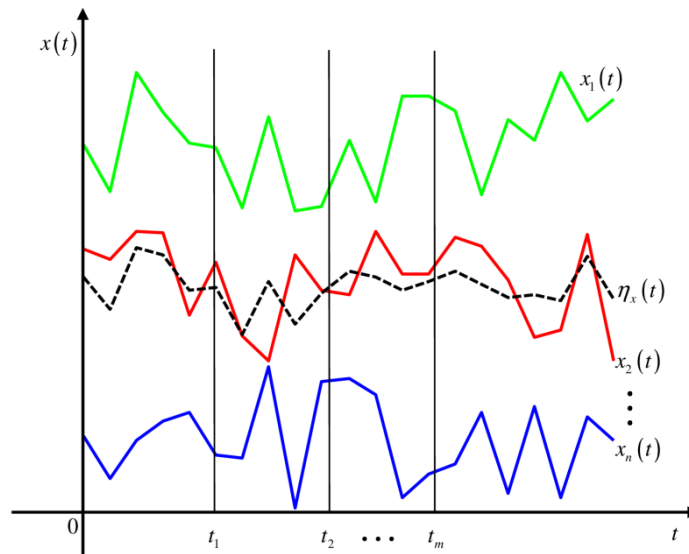


Fig. 3.13

La funzione f_X in realtà "pesa" l'andamento di tutte le funzioni del processo, di conseguenza, $\eta_X(t)$ è una funzione che rappresenta il processo più probabile. Ad esempio, sia il processo aleatorio stazionario

$$x(t) = a \cos(\omega t + \phi), \quad \phi \in [0, \pi] \quad (3.47)$$

con ϕ uniformemente distribuito nell'intervallo $[0, \pi]$. Al variare di ϕ otteniamo infiniti processi aleatori, in questo caso

$$\eta_X(t) = E[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} a \cos(\omega t + \phi) f(\phi) d\phi \quad (3.48)$$

ove $f(\phi) = 1/\pi$. Pertanto la (3.48) diventa

$$\eta_X(t) = \frac{a}{\pi} \int_0^\pi \cos(\omega t + \phi) d\phi \quad (3.49)$$

Da cui

$$\eta_X(t) = \frac{2a}{\pi} \sin(\omega t + \pi) \cos(\omega t + \pi) = -\frac{2a}{\pi} \sin(\omega t) \quad (3.50)$$

Ancora, possiamo definire per qualsiasi processo aleatorio stazionario la varianza nonché la sua potenza media, rispettivamente, entrambe "pesate" da f_X :

$$\sigma_X^2(t) = E[(X(t) - \eta_X(t))^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \eta_X(t)) f_X dx \quad (3.51)$$

e

$$P_X(t) = E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X dx \quad (3.52)$$

La (3.51) è anche pari a:

$$\sigma_X^2(t) = P_X(t) - \eta_X^2(t) \quad (3.53)$$

Se su uno stesso processo aleatorio stazionario fissiamo due istanti t_1 e t_2 otteniamo, come più volte detto, due variabili aleatorie: $X(t_1)$ e $X(t_2)$. A questo punto se desideriamo conoscere la relazione che le lega (correlazione) possiamo definire la funzione chiamata **autocorrelazione del secondo ordine** $R_X(t_1, t_2)$, nota la funzione densità di probabilità $f_{X_{1,2}}(x_1, x_2, t_1, t_2)$:

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{x_1=-\infty}^{+\infty} \int_{x_2=-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f_{X_{1,2}} dx_1 dx_2. \quad (3.54)$$

Ad esempio, sempre con riferimento al processo aleatorio stazionario (3.47), fissati due istanti t_1 e t_2 , otteniamo $R_X(t_1, t_2)$:

$$R_X(t_1, t_2) = \int_0^{\pi} a \cos(\omega t_1 + \phi) a \cos(\omega t_2 + \phi) f_{X_{1,2}} d\phi \quad (3.55)$$

Dopo semplici passaggi la (3.55) diventa

$$R_X(t_1, t_2) = \frac{a^2}{2} \cos[\omega(t_1 - t_2)] \quad (3.56)$$

La (3.56) mostra chiaramente che la funzione di autocorrelazione dipende dalla scelta dei due istanti t_1 e t_2 , essendo a ed ω costanti: $R_X = f(t_1, t_2)$.

Infine la funzione di **autocovarianza** è data da:

$$\begin{aligned}
 C_{X_{1,2}}(t_1, t_2) &= E[(X(t_1) - \eta_X(t_1))(X(t_2) - \eta_X(t_2))] = \\
 &= \int_{x_1=-\infty}^{+\infty} \int_{x_2=-\infty}^{+\infty} [x_1 - \eta_X(t_1)][x_2 - \eta_X(t_2)] dx_1 dx_2
 \end{aligned} \tag{3.57}$$

Osserviamo che la (3.57) si può anche scrivere come segue:

$$C_{X_{1,2}}(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) - \eta_X(t_1)\eta_X(t_2). \tag{3.58}$$

3.5 La funzione δ e l'integrale di convoluzione

Supponiamo di avere un sistema stazionario lineare in quiete. Se immaginiamo di colpirlo con un martello esso entrerà in vibrazione.

Dopo un tempo t la sua risposta sarà data dalla funzione $h(t)$ (dove h ci ricorda il corrispondente lemma inglese *hammer* cioè martello).

Se vogliamo conoscere il valore di h dopo un "ritardo temporale" pari a $t - \tau$, con $\tau < t$, esso è dato da $h(t - \tau)$. Supponiamo, ora, di avere una funzione qualsiasi $x(t)$ come in Fig. 3.14.

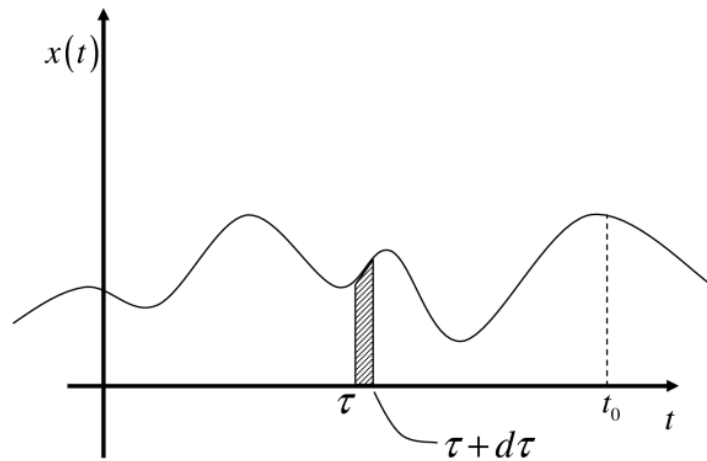


Fig. 3.14

Se fissiamo un istante t_0 ed un istante $\tau < t_0$ allora possiamo pensare che l'intervallo temporale $[\tau, \tau + d\tau]$, con $d\tau$ incremento molto piccolo, possa essere equivalente ad un impulso avente grandezza $x(\tau)d\tau$.

Ciò premesso, possiamo ritenere che la risposta $x(t)$ del sistema sia proporzionale all'input che è rappresentato da un impulso (un colpo di martello) di durata teoricamente nulla:

$$x(t) = I\delta(t), \quad (3.59)$$

dove abbiamo indicato con I un parametro costante avente la dimensione di una forza per un tempo e con $\delta(t)$ la funzione delta di Dirac. Questa, come è noto, è definita, assegnato un istante t^* qualsiasi:

$$\delta(\tau - t^*) = \begin{cases} 0, & \tau \neq t^* \\ 1, & \tau = t^* \end{cases}$$

cioè analiticamente,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) d\tau = 1. \quad (3.60)$$

Se diciamo $f(t)$ una funzione qualsiasi, allora la notazione prodotto

$$\delta \otimes f = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - t^*) f(\tau) d\tau = f(\tau = t^*)$$

ci fornisce il valore di f nell'istante $\tau = t^*$. Questa è una proprietà molto importante della funzione δ , utilizzata appieno con le funzioni a supporto compatto quali ad esempio quelle appartenenti alla famiglia delle wavelet. Sfruttando quest'ultima osservazione e tornando a quanto detto in premessa, allora

nel caso che $x(t)$ rappresenti la risposta di un sistema a seguito di un colpo di martello, avremo, stante la (3.59) e (3.60):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = I \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = I .$$

Facciamo un esempio (Fig. 3.15).

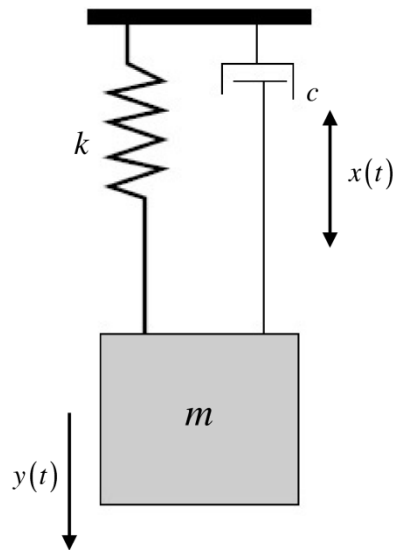


Fig. 3.15

Se ipotizziamo che il sistema di Fig. 3.15 abbia una massa m trascurabile allora l'equazione del moto è data da:

$$c\dot{y} + ky = x .$$

Se x è data da una funzione impulsiva di ampiezza h , allora $x(t) = h\delta(t)$ cioè

$$c\dot{h} + kh = \delta(t) . \quad (3.61)$$

Poiché sappiamo che per $t > 0$ si ha $\delta(t) = 0$ allora la (3.61) diventa

$$c\dot{h} + kh = 0$$

che ammette una soluzione

$$h = Ce^{-\frac{kt}{c}},$$

con C costante da determinare con le condizioni iniziali $t=0$, secondo il seguente ragionamento. La (3.61) può essere integrata come di seguito, ricordando che

$$\int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1,$$

otteniamo:

$$c \int_{0^-}^{0^+} \dot{h} dt + k \int_{0^-}^{0^+} h dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1. \quad (3.62)$$

Osserviamo che

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \int_{0^-}^{0^+} h dt$$

è nullo in quanto h è supposta continua. Il primo integrale invece fornisce

$$c \int_{0^-}^{0^+} \dot{h} dt = c [h(t)]_{0^-}^{0^+} = 1. \quad (3.63)$$

Quindi

$$h(t=0^+) = \frac{1}{c} = C.$$

Ne consegue che (Fig. 3.16)

$$h(t) = 0, \quad t < 0$$

$$h(t) = \frac{1}{c} e^{-\frac{kt}{c}}, \quad t \geq 0$$

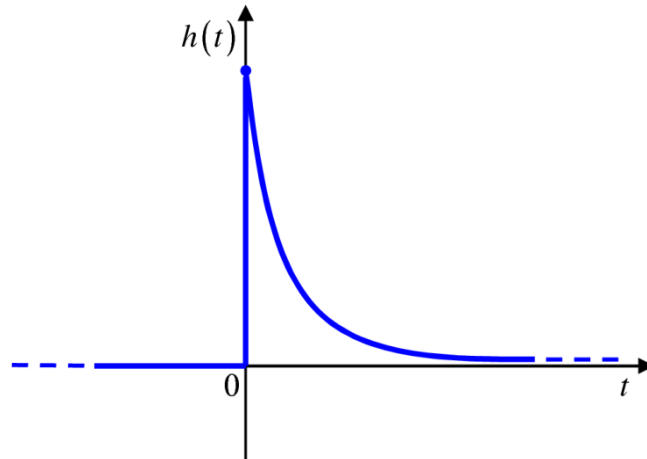


Fig. 3.16

Nel ragionamento testé fatto, osserviamo che poiché abbiamo supposto che il sistema fosse in quiete prima che venisse colpito con un martello (forza impulsiva), allora deve essere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty \quad (3.64)$$

cioè la (3.64) deve essere sommabile, e quindi ad energia finita (quantunque la sua natura sia di tipo impulsivo). Ciò premesso, ritornando al nostro problema, abbiamo detto che $x(\tau)d\tau$ è la funzione della risposta $x(t)$ del sistema susseguente all'azione della forza impulsiva, tipo δ di Dirac, avente ampiezza unitaria. Quindi

$$\frac{x(\tau)d\tau}{1}$$

è la frazione della risposta $x(t)$ del sistema ad una forza impulsiva unitaria nell'istante $t = \tau$, cioè $h(t - \tau)$. Quindi $h(t - \tau)x(\tau) d\tau$ è il contributo, dato dall'area $x(\tau) d\tau$ (Fig. 3.14), alla risposta totale del sistema nell'istante t .

Quindi

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(t - \tau)x(\tau) d\tau \quad (3.65)$$

fornirà la risposta totale del sistema da $-\infty$ fino all'istante t . Osserviamo che la (3.65) la possiamo scrivere in quanto è possibile applicare il principio di sovrapposizione degli effetti avendo supposto il sistema lineare.

La (3.65) è chiamata anche **convoluzione** o **integrale di convoluzione**. Notiamo che avendo supposto la condizione (3.64) allora anche la risposta $|x(t)|$ sarà limitata. L'integrale di convoluzione gode della proprietà commutativa, nel senso che dette $x(t)$ e $y(t)$ due funzioni, allora

$$\int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau) d\tau = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} y(\tau)x(t-\tau) d\tau$$

che si è soliti scrivere anche con la notazione abbreviata:

$$x(t) \otimes y(t) = y(t) \otimes x(t).$$

Sono altresì verificabili le proprietà associativa e distributiva rispetto alla somma, che possiamo scrivere rispettivamente, con notazione sintetica, come di seguito:

$$[x(t) \otimes y(t)] \otimes z(t) = x(t) \otimes [y(t) \otimes z(t)]$$

e

$$x(t) \otimes [y(t) + z(t)] = x(t) \otimes y(t) + x(t) \otimes z(t).$$

3.6 Metodologia per lo studio dei sistemi caotici e non

Un sistema, per essere definito caotico, deve presentare elementi o proprietà non-lineari. Un assunto di base è che un sistema lineare non può esibire vibrazioni caotiche. Di conseguenza, in un sistema lineare, ingressi periodici produrranno uscite proporzionalmente periodiche, trascorso il transitorio.

È pur vero che, per vari motivi, i sistemi cosiddetti lineari sono una eccezione da qui l'esigenza di proporre lo studio di sistemi meccanici non-lineari.

Comportamenti elastici di tipo non-lineare possono essere indotti sia dalle proprietà del materiale che dalla particolare geometria di un componente meccanico che può assumere più posizioni o stati di equilibrio critici determinati, a volte, da fenomeni di usura precoce ed anomala.

Nel campo delle vibrazioni caotiche, non vi sono ingressi assunti come random; cioè, le forze applicate o le eccitazioni sono assunte essere deterministiche.

Per definizione, le vibrazioni, cosiddette caotiche, nascono da sistemi fisici deterministici o da equazioni differenziali o alle differenze (che comunque sono deterministiche).

In genere, la vibrazione anomala non mostra un pattern visibile ovvero periodicità particolari, tanto più se l'osservazione si riferisce ad una lunga sequenza temporale. Inoltre, molti sistemi a comportamento non lineare, mostrano vibrazioni quasi-periodiche in cui sono presenti due o più segnali periodici incommensurabili, cioè che presentano un rapporto irrazionale delle loro rispettive frequenze. In tal caso segnali non-periodici possono sempre scomporsi nella somma di funzioni armoniche periodiche del tipo

$$x(t) = C_1 \sin(\omega_1 t + d_1) + C_2 \sin(\omega_2 t + d_2)$$

dove ω_1/ω_2 è un numero irrazionale.

3.6.1 Mappa di Poincarè

Una tecnica impiegata quando si ha a disposizione una sola variabile misurata (nel nostro caso il segnale accelerometrico) è quella che di rappresentarla nello spazio di embedding o pseudo-fasi. Sebbene questa tecnica di rappresentare le orbite è molto impiegata, il plot di sistemi continui finisce col fornire poca informazione. In tal caso occorre ricorrere ad una tecnica di rappresentazione del piano delle fasi modificata chiamata mappa di Poincaré.

Ricordiamo che l'analisi diretta dello spettro di Fourier non è di grande aiuto se non si possono osservare cambiamenti nella sua composizione al variare dell'ampiezza e/o della frequenza dell'azione forzante generatrice indiretta delle vibrazioni.

Pertanto, quando il moto è forzato di periodo T , una regola naturale di campionamento per ottenere una mappa di Poincaré è quella di scegliere $t_n = nT + \tau_0$. Questo consente di distinguere tra moti periodici e non-periodici.

Per esempio, se il moto armonico campionato, è sincronizzato con il suo periodo la mappa sarà formata da un solo punto (Fig. 3.17).

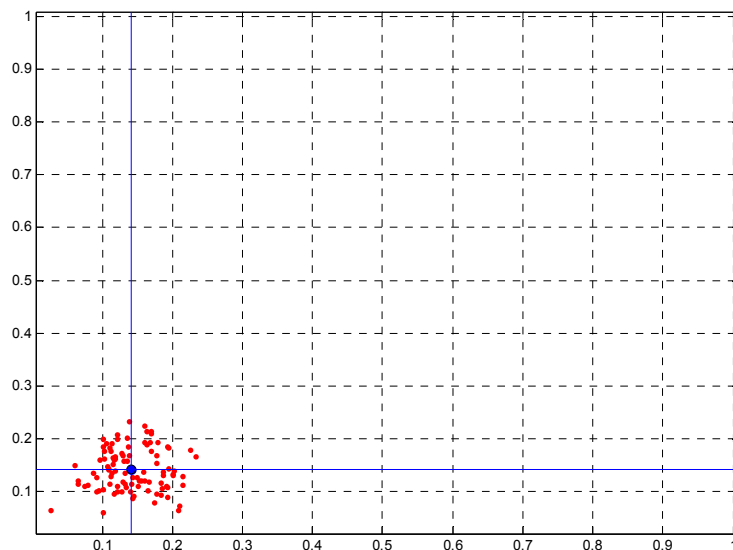


Fig. 3.17 - Moto armonico campionato e sincronizzato con il suo periodo

Un'altra mappa di Poincaré non-caotica è mostrata in Fig. 3.18 dove il moto consiste di 2 frequenze incommensurabili.

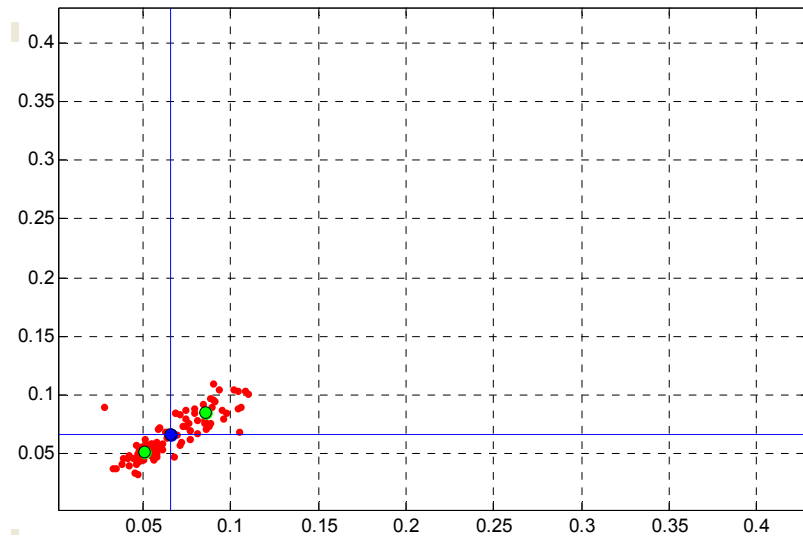


Fig. 3.18 - Esempio di mappa di Poincaré dove il moto consiste di due frequenze incommensurabili

Infine, se la mappa di Poincaré non mostra o un insieme finito di punti o un'orbita chiusa il moto può essere considerato caotico.

3.6.2 Metodo per la determinazione della dinamica evolutiva di una serie temporale

Presentiamo in questo paragrafo una procedura per la determinazione del livello di caoticità eventualmente presente in una serie temporale anche se affetta da rumore. Tale metodica può sostituire la ricerca del λ esponente massimo di Lyapunov. Com'è noto, un sistema instabile e caotico esprime un $\lambda > 0$, il che implica che le traiettorie generalmente si separano esponenzialmente nel tempo mentre se il sistema è regolare ($\lambda \leq 0$) le traiettorie rimangono vicine e comunque in un intorno di ciascuna di esse.

Se non sono note le equazioni ovvero allorquando dobbiamo studiare serie temporali sperimentali, allora λ può essere stimato ricorrendo, ad esempio, alla ricostruzione dello "spazio delle fasi" (metodo proposto da Takens), oppure attraverso la linearizzazione approssimata di un opportuno operatore di evoluzione oppure attraverso un metodo diretto.

La metodica che verrà di seguito illustrata, invece, non fa ricorso alla identificazione della dimensione e quindi alla ricostruzione dello spazio delle fasi; essa è applicabile direttamente alla serie numerica di dati acquisiti. La metodica fa

riferimento ad un parametro che tende ad assumere due valori: se la dinamica della serie è regolare allora il parametro tende a zero viceversa se la serie esibisce una dinamica caotica allora il parametro tende ad uno. Inoltre non pone particolari problemi la scelta del campo vettoriale come ad esempio la sua dimensione, e, come abbiamo già detto, essa non pone particolari problemi per la ricostruzione dello spazio delle fasi.

Per facilitare lo studio e l'applicazione della metodica, faremo ricorso alla mappa:

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n), \mu \in (1, 4] \quad (3.66)$$

Assegnata una serie di osservazioni x_j , con $j=1,2,...,N$, definiamo variabili di traslazione:

$$\begin{aligned} \chi_{\omega}(m) &= \sum_{j=1}^m x_j \cos(j\omega) \\ \zeta_{\omega}(m) &= \sum_{j=1}^m x_j \sin(j\omega) \end{aligned} \quad (3.67)$$

con $\omega \in (0, \pi)$ e $m=1,2,...,N$.

La semplice osservazione di χ vs ζ può aiutare a distinguere sequenze regolari da quelle caotiche. Nelle figure che seguono possiamo osservare oltre all'evoluzione dinamica della mappa per vari valori di μ anche le rispettive rappresentazioni di χ vs ζ . In Fig. 3.19 è riportato l'andamento temporale della mappa per $\mu=2$, $\text{seed}=0.3$ ed $\omega=1$ (quest'ultimo valore rimarrà costante per tutte le esemplificazioni che seguono). Essa oltre ad essere stabile è anche convergente verso il suo punto fisso. La sua regolarità è evidente soprattutto osservando la Fig. 3.20.

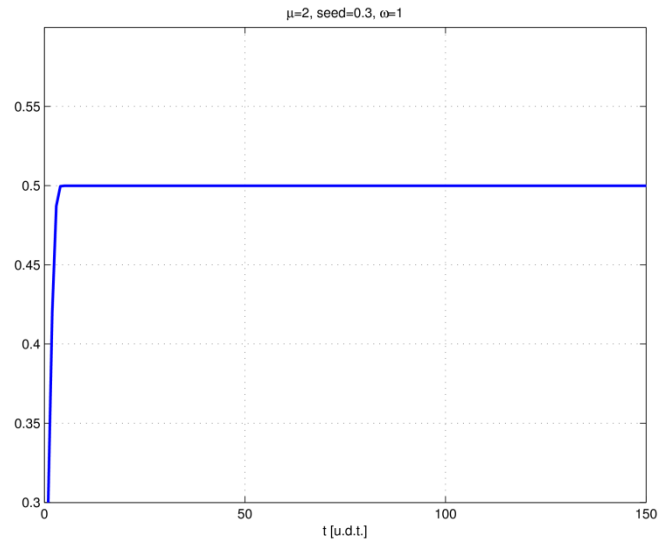


Fig. 3.19

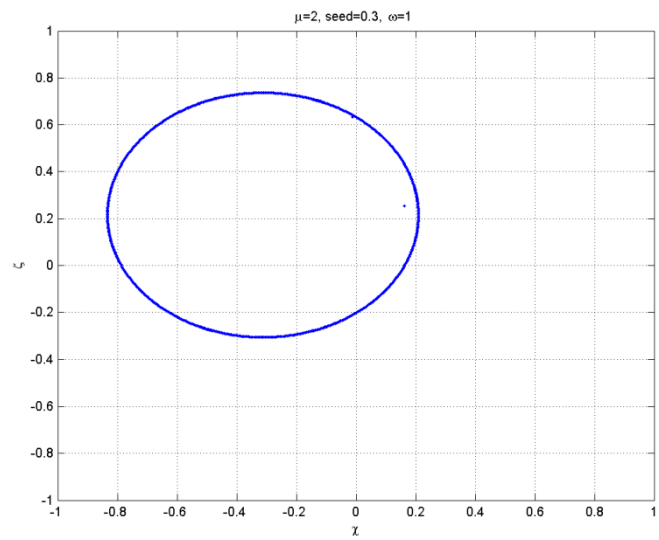


Fig. 3.20

Notiamo la presenza di un punto all'interno dell'ellisse, esso è il seed da cui si genera la sequenza.

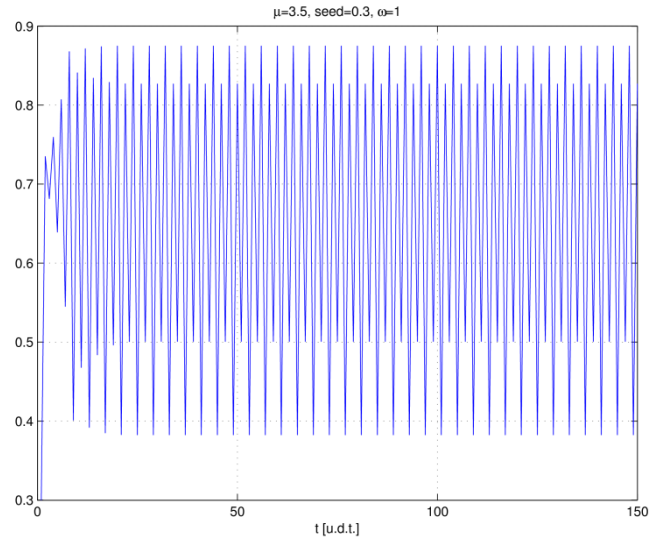


Fig. 3.21

La mappa per $\mu=3.5$ è rappresentata in Fig. 3.21 nella sua evoluzione temporale dalla quale possiamo notare la presenza di almeno due distinte ciclicità. In Fig. 3.22 è facilmente osservabile quanto anzi detto.

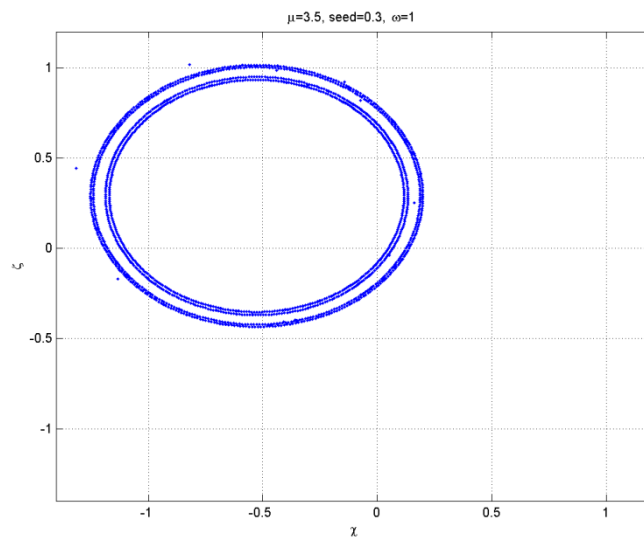


Fig. 3.22

Infine nella Fig. 3.23 è riportata l'evoluzione temporale della mappa per $\mu=3.9$ e $\text{seed}=0.3$. La caoticità è più apprezzabile nella Fig. 3.24a.

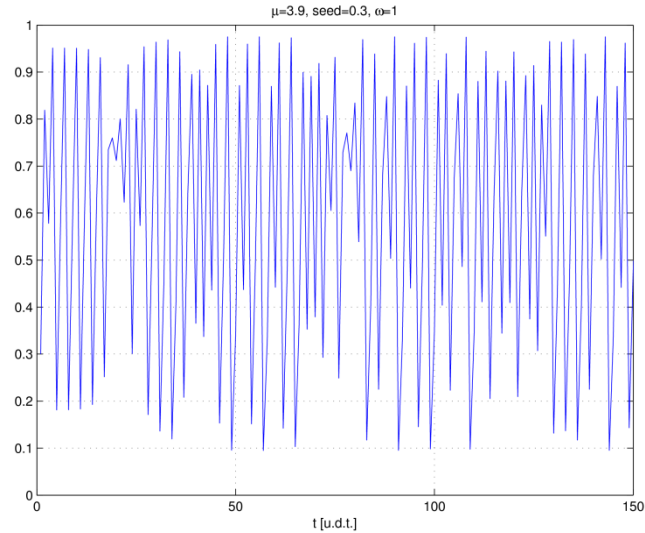


Fig. 3.23

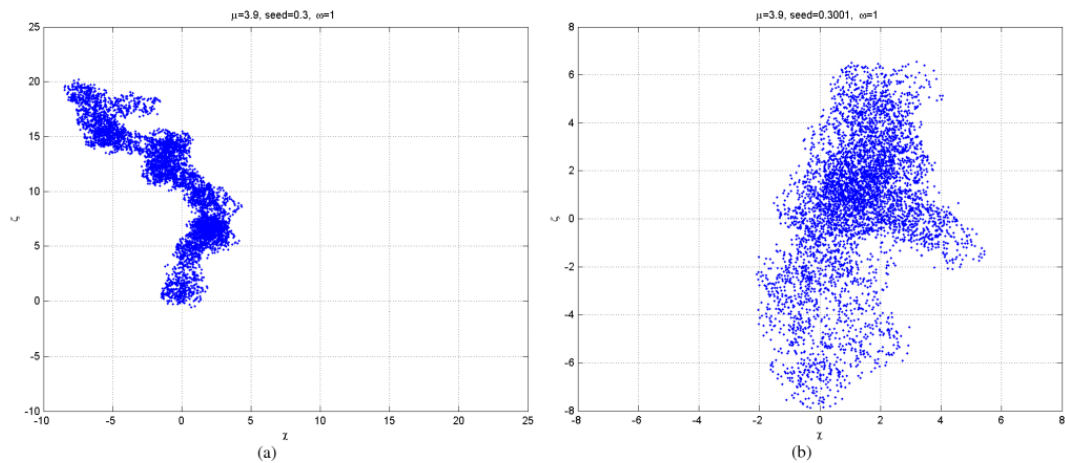


Fig. 3.24

Relativamente a quest'ultimo caso vogliamo rimarcare una proprietà tipica delle serie temporali caotiche rappresentata dalla estrema sensibilità per quanto attiene alla sua evoluzione dal seed. Infatti in Fig. 3.14b è mostrato la dinamica del caso in cui il seed è pari a 0.3001. Ebbene una variazione di appena un decimillesimo è sufficiente a generare una evoluzione del tutto diversa da quella precedente sia per qualità sia per forma e sia per la sua topologia.

Se vogliamo, però, meglio caratterizzare la sequenza numerica possiamo ricorrere allo studio della **media quadratica dello spostamento** $M_w(m)$. Essa trae spunto da quanto è osservabile dalla teoria del chaos. Sequenze che mediamente mostrano distanze stabili rispetto alla evoluzione temporale della serie numerica sono classificabili come stabili o regolari o stazionarie. Viceversa se tali distanze,

in media quadratica, tendono ad annullarsi ed allora siamo di fronte ad una serie uniformemente convergente verso il suo punto fisso. Distanze in media quadratica che tendono ad incrementarsi in maniera più o meno regolare rispetto alla evoluzione temporale della serie, definiscono sistemi dinamicamente instabili ovvero localmente caotici se sono limitati, altrimenti, se tale caratteristica non è possibile confinarla in un dominio multidimensionale la caoticità sarà definita assoluta.

Infatti, si può dimostrare, che se la successione numerica è regolare allora $M_\omega(m)$ è limitata, altrimenti essa varia linearmente nel tempo.

Definiamo $M_\omega(m)$ come segue:

$$M_\omega(m) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N-m} \sum_{j=1}^{N-m} \left\{ [\chi_\omega(j+m) - \chi_\omega(j)]^2 + [\zeta_\omega(j+m) - \zeta_\omega(j)]^2 \right\} \quad (3.68)$$

dove $m=1,2,\dots,m^*$ ed $m^* \ll N$ (in genere $m^*=N/10$).

Se proviamo a diagrammare $M_\omega(m)$ in funzione di m , è molto probabile che l'andamento risulti essere di tipo oscillatorio (Fig. 3.25).

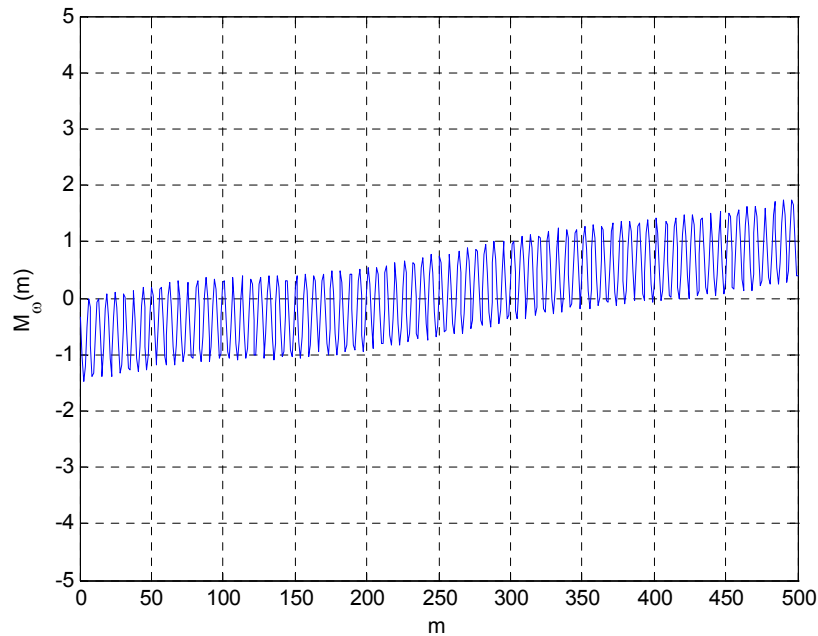


Fig. 3.25

In tal caso, al fine di meglio interpretare l'andamento di $M_\omega(m)$, è più utile sottrarre da esso la componente oscillatoria, chiamiamola $O(\omega, m)$, cioè:

$$\Delta_\omega(m) = M_\omega(m) - O(\omega, m) \quad (3.69)$$

In Fig. 3.25 è diagrammato l'andamento di $M_\omega(m)$ relativamente alla mappa (3.66), avendo posto $x_0=0.3$, $\mu=3.91$ ed $\omega=1$. L'andamento di $M_\omega(m)$ lascia chiaramente intuire la instabilità della mappa la quale, con la scelta operata per μ è certamente caotica ($\lambda > 0$).

Dobbiamo definire cosa sia $O(\omega, m)$. Essa è la componente oscillatoria esibita da $M_\omega(m)$ che va sottratta dalla (3.68) se ne vogliamo linearizzare l'andamento.

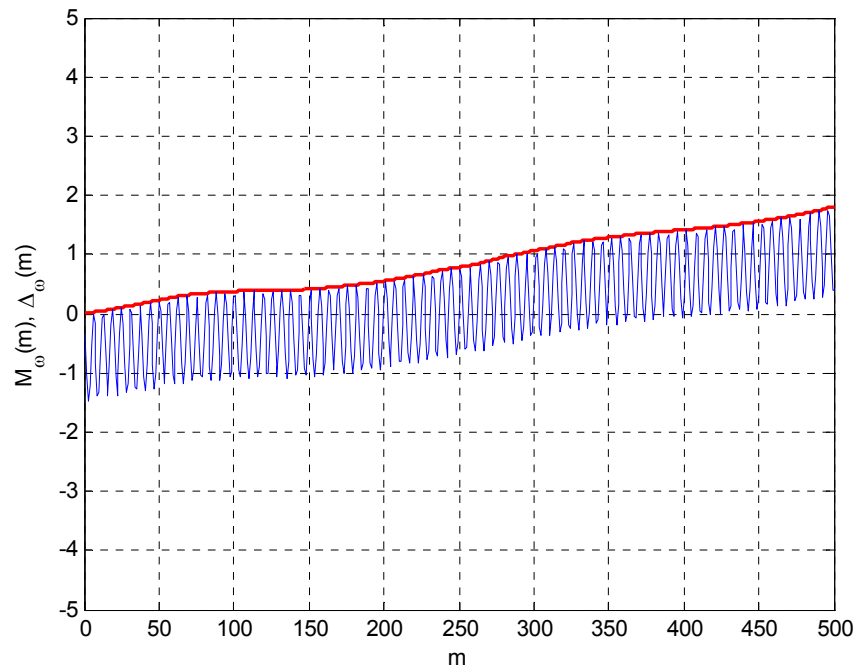


Fig. 3.26

In Fig. 3.26 oltre all'andamento di $M_\omega(m)$ è riportata anche il diagramma di $\Delta_\omega(m)$ (linea in grassetto). Rispetto al diagramma di $M_\omega(m)$, essa consente di meglio individuare la pendenza relativa all'evoluzione del sistema dinamico rappresentato dalla serie temporale x_j , con $j=1,2,...N$.

Definiamo $O(\omega, m)$ come di seguito:

$$O(\omega, m) = \left| E[x] \right|^2 \frac{1 - \cos(m\omega)}{1 - \cos(\omega)} \quad (3.70)$$

dove

$$E[x] = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j. \quad (3.71)$$

Ricordiamo che il coefficiente di correlazione lineare $\rho \in [-1, +1]$, tra due vettori x ed y di uguale lunghezza n è definito come:

$$\rho(x, y) = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sqrt{\text{var}(x) \text{var}(y)}} \quad (3.72)$$

dove $\text{var}(x) = \text{cov}(x, x)$ e $\text{var}(y) = \text{cov}(y, y)$ e

$$\text{cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

e

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

sono le medie dei vettori x ed y rispettivamente.

Il coefficiente di correlazione lineare ρ misura quanto è stretta la relazione che lega l'evoluzione della (3.69) con quella di una evoluzione "lineare".

Stante la (3.72) procediamo ad adattarla al nostro caso, definendo preliminarmente i seguenti vettori:

$$\xi = (1, 2, \dots, m^*)$$

e

$$\Delta = (\Delta_{\omega}(1), \Delta_{\omega}(2), \dots, \Delta_{\omega}(m^*))$$

con $m^* = N/10$ ed N =lunghezza del vettore.

Sante la (3.72) possiamo scrivere:

$$K_{\omega} = \rho(\xi, \Delta) = \frac{\text{cov}(\xi, \Delta)}{\sqrt{\text{var}(\xi) \text{var}(\Delta)}}. \quad (3.73)$$

Secondo la (3.73) K_{ω} , funzione di ω , è ricavata da $\Delta_{\omega}(m)$, ma all'occorrenza può essere anche ricavata da $M_{\omega}(m)$.

Così definita la funzione K_{ω} tende a zero se siamo in presenza di dinamiche regolari, altrimenti se queste ultime sono caotiche tende ad uno. A tal fine diagrammiamo K_{ω} in funzione di μ , relativamente alla mappa (3.66) (Fig. 3.27).

A conferma di quanto sopra K_{ω} assume valori prossimi a zero per tutti quei valori che rendono la mappa stabile e per i quali l'esponente massimo di Lyapunov assumono valori negativi (Fig. 3.28). Viceversa laddove la mappa esibisce dinamiche pseudo caotiche allora K_{ω} tende ad uno ed i relativi esponenti di Lyapunov risultano essere positivi. Notiamo che la suddetta mappa per determinati valori di μ tende ad essere pseudo-stazionaria. Un esempio è riportato in Fig. 3.29 per $\mu=3.3$, seed=0.3 per 150 iterazioni.

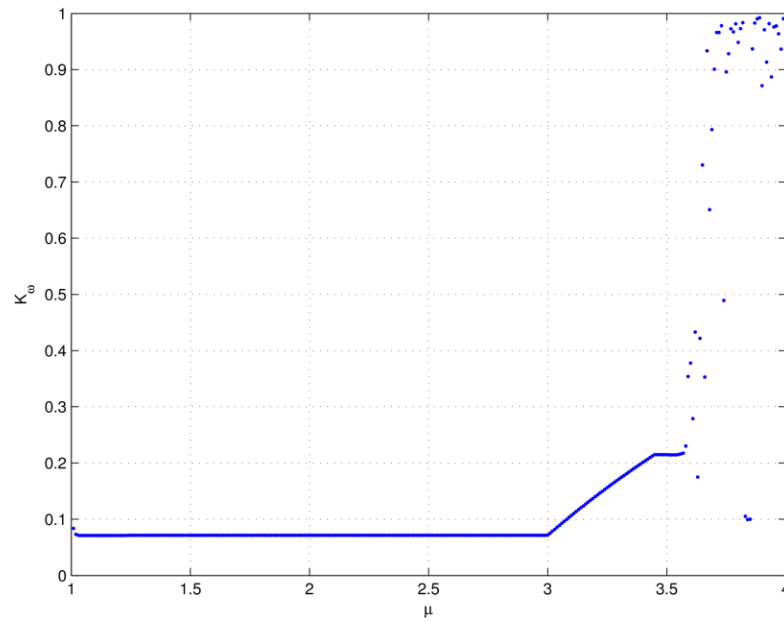


Fig. 3.27

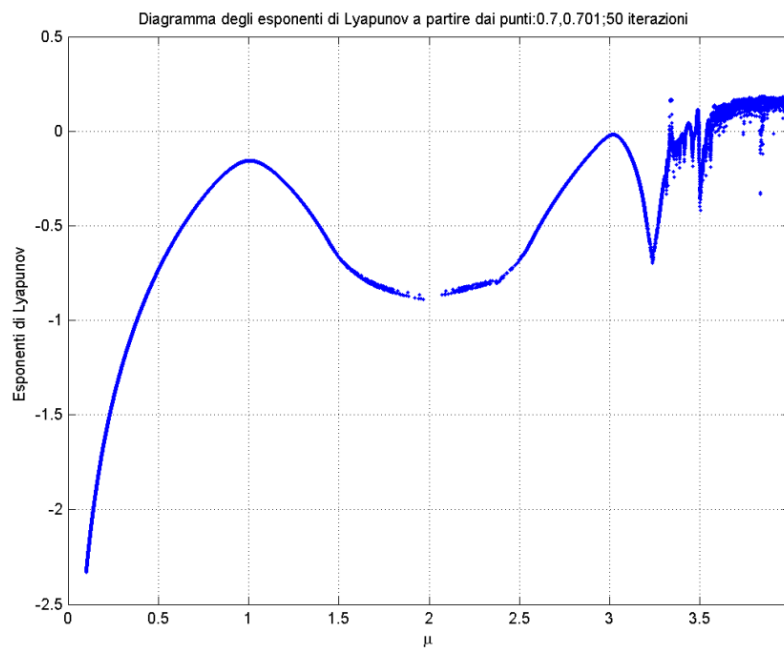


Fig. 3.28

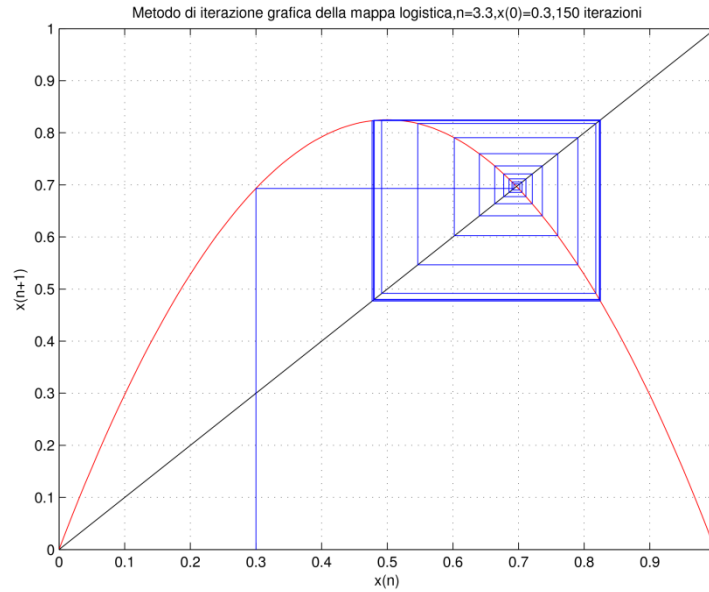


Fig. 3.29

L'evoluzione della mappa è convergente in una prima fase verso il punto fisso, successivamente tende a divergere per poi orbitare in maniera stazionaria ed ad una distanza costante dal suddetto punto fisso. Per tale dinamica l'esponente di Lyapunov è negativo viceversa il valore di K_ω è pari a circa $+0.18$, dimostrando in tal caso una maggiore sensibilità nella descrizione della dinamica evolutiva. In Fig. 3.30 è riportata la mappa per $\mu=2$. Per tale condizione l'esponente di Lyapunov è negativo mentre in Fig. 3.31 è riportato l'andamento di K_ω che per $\omega \in (0, \pi)$ presenta un valore non superiore a 0.1 .

Per particolari valori di μ , però, osserviamo l'insorgenza di un nuovo fenomeno che potremmo definire di "risonanza". Osservando attentamente l'evoluzione della mappa di Fig. 3.32, ottenuta per $\mu=3.55$, notiamo che essa prevalentemente si stabilizza su due orbite a differenti distanze dal punto fisso. È interessante notare che K_ω , invece, pur assumendo valori tendenti a zero al variare di ω , per ben tre volte assume valori prossimi ad uno, facendo ipotizzare per la mappa, se avessimo scelto i corrispondenti valori di ω , un andamento pseudo-caotico. Ebbene un tale fenomeno lo possiamo evitare se ricorriamo a diversi valori di ω per il quale suggeriamo di adoperare una distribuzione uniformemente distribuita nell'intervallo $(0, \pi)$. Infatti, è facilmente osservabile, dalla Fig. 3.33, come tale fenomeno è facilmente individuabile se ricorriamo a più valori di ω .

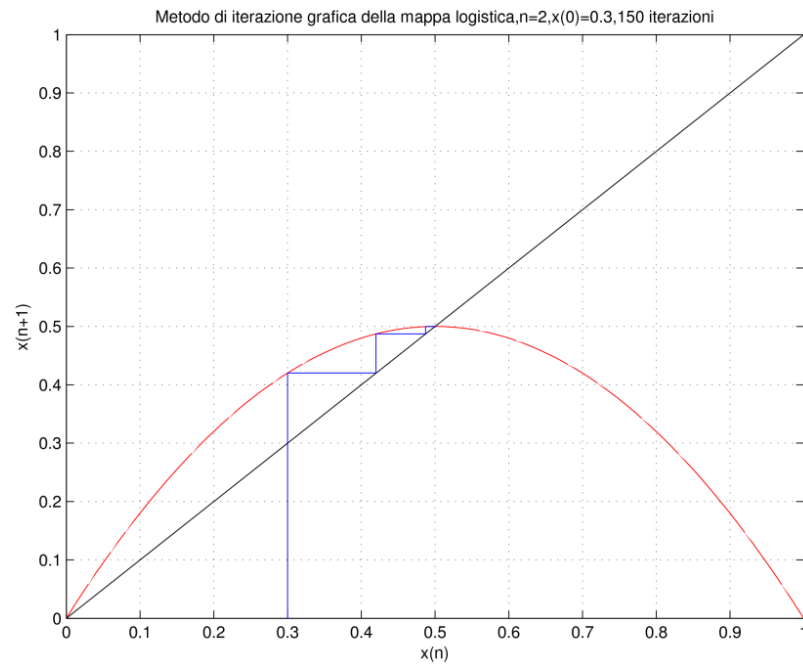


Fig. 3.30

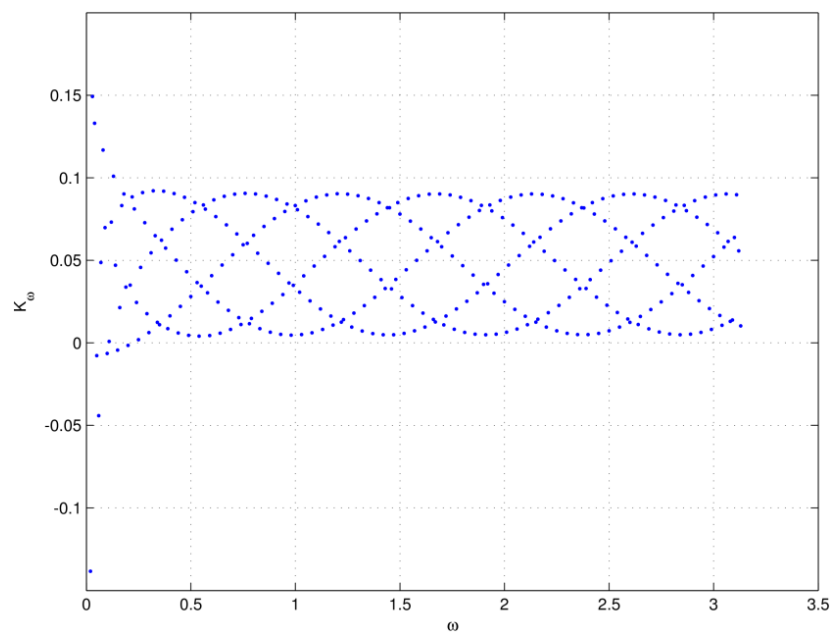


Fig. 3.31

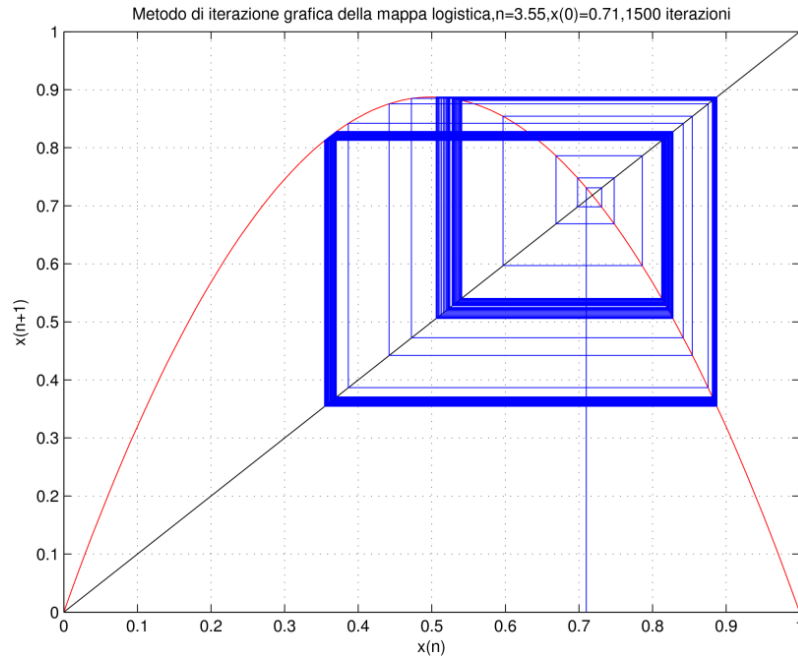


Fig. 3.32

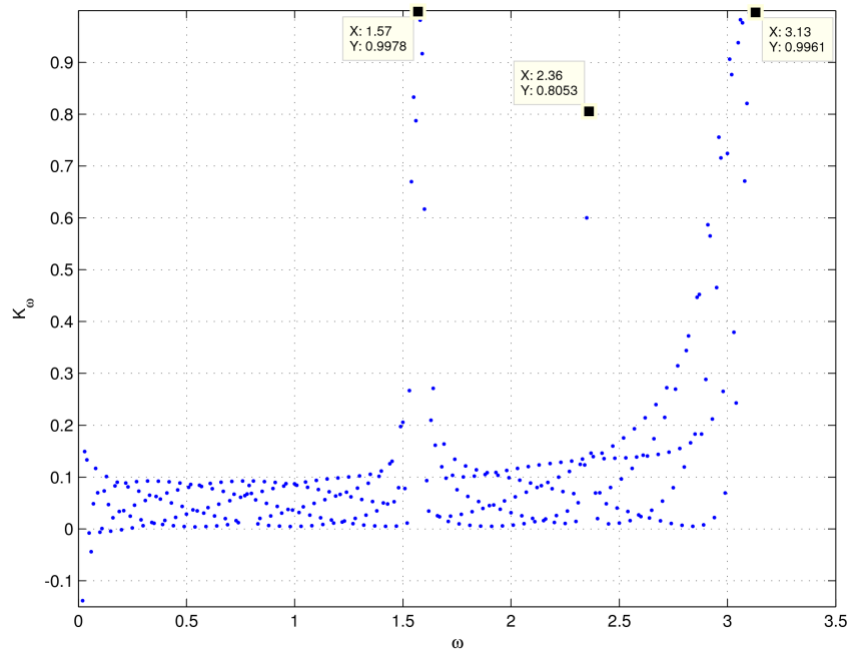


Fig. 3.33

La Fig. 3.34 illustra l'evoluzione chiaramente caotica della mappa in oggetto per la quale $\mu=3.9$ e l'esponente di Lyapunov è certamente positivo. L'andamento di K_ω , al variare di ω è illustrato nella Fig. 3.35.

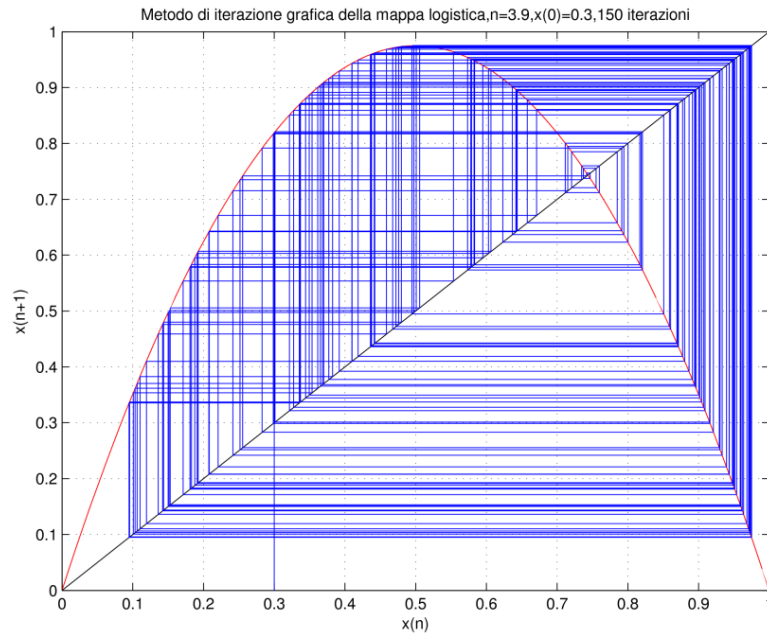


Fig. 3.34

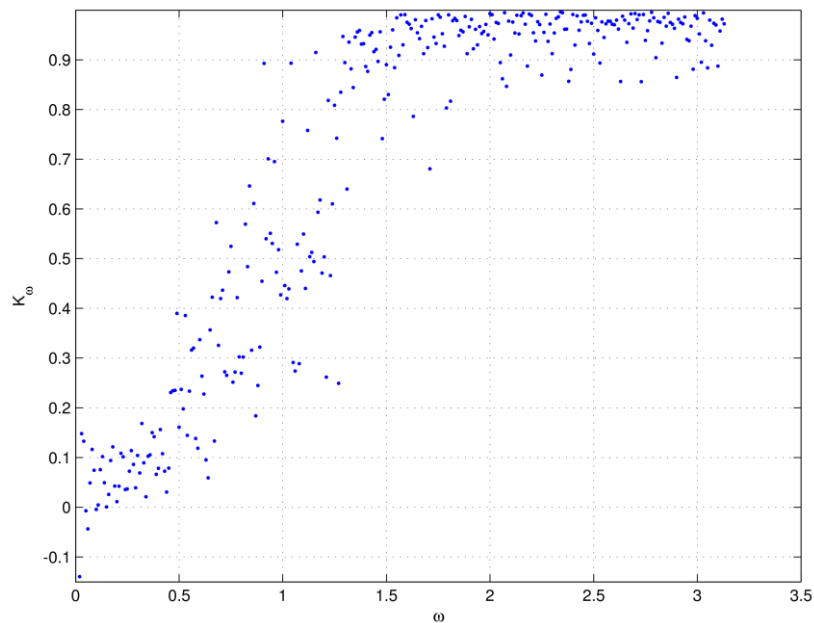


Fig. 3.35

La valutazione di K_{ω} , al variare di ω , assegnata una determinata mappa, può essere fatta ricorrendo alla statistica parametrica che fa riferimento alla media ovvero alla mediana. Quest'ultima è da preferirsi in quanto è più robusta rispetto alla media, non risentendo degli eventuali valori generati dalle risonanze (*outliers*).

Ad esempio, con riferimento all'ultima mappa generata abbiamo per media un valore pari a 0.6795 e per mediana un valore pari a 0.8951. Quest'ultimo valore, invero, è quello che meglio esprime la reale evoluzione del fenomeno caotico.

Allora possiamo porre

$$\bar{K} = \text{mediana}(K_{\omega}). \quad (3.74)$$

Pertanto ribadiamo che, onde evitare l'inquinamento del parametro K_{ω} per la presenza di fenomeni di risonanza, è consigliabile procedere alla determinazione della mediana di tali valori ottenuti facendo variare ω uniformemente nell'intervallo $(0, \pi)$.

Le risonanze si possono verificare allorquando il vettore x_j contiene un termine proporzionale a $e^{-i\omega^*p}$, dove $p=1,2,\dots,N$, infatti si verifica una risonanza se poniamo $\omega=\omega^*$.

Ad esempio la serie numerica generata dalla mappa (3.66) per $\mu=3.9$, nell'ipotesi di un campionamento pari ad 1Hz genera il seguente spettro (Fig. 3.36). La frequenza principale è pari a 0.1253 mentre la sua seconda ottava è pari a 0.2507. Notiamo che in Fig. 3.33 una risonanza è presente per $\omega=1.57\text{rad}$. La conversione da Hz a rad è data come noto dalla seguente relazione:

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow \omega = 2\pi \times 0.2507\text{rad} = 1.575\text{rad},$$

e pertanto ritroviamo la ω di risonanza.

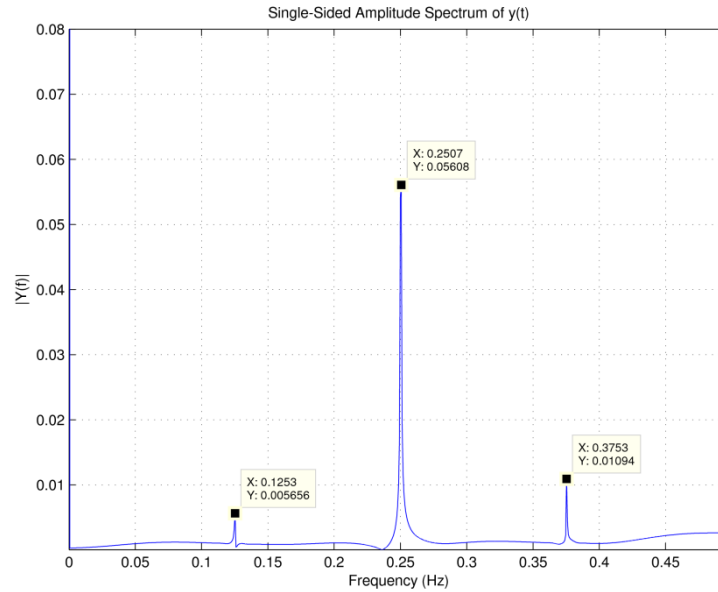


Fig. 3.36

Esiste un valore di μ che è capace di determinare una situazione di caos cosiddetta "debole" (*weak*). In tal caso, siamo in presenza in una zona di confine (*edge of chaos*). Se poniamo $\mu_{\infty}=3.569945672\dots$, la mappa esibisce una biforcazione (Fig. 3.37).

Nella tabella che segue sono riportati i valori di μ , media e mediana assunti dalla dinamica relativa alle mappe in funzione di μ (Tab. 3.1).

μ	Media	Mediana	λ
3.569945672...	0.1443	0.0778	-0.0030358
3.570945672...	0.1443	0.0779	-0.00083618
3.6	0.2726	0.2003	0.0013323
3.9	0.6795	0.8951	0.0031015

Tab. 3.1

Osserviamo come il valore della mediana risulti estremamente sensibile alla evoluzione della serie anche in corrispondenza di una situazione limite dove la presenza del chaos è, come detto, debole.

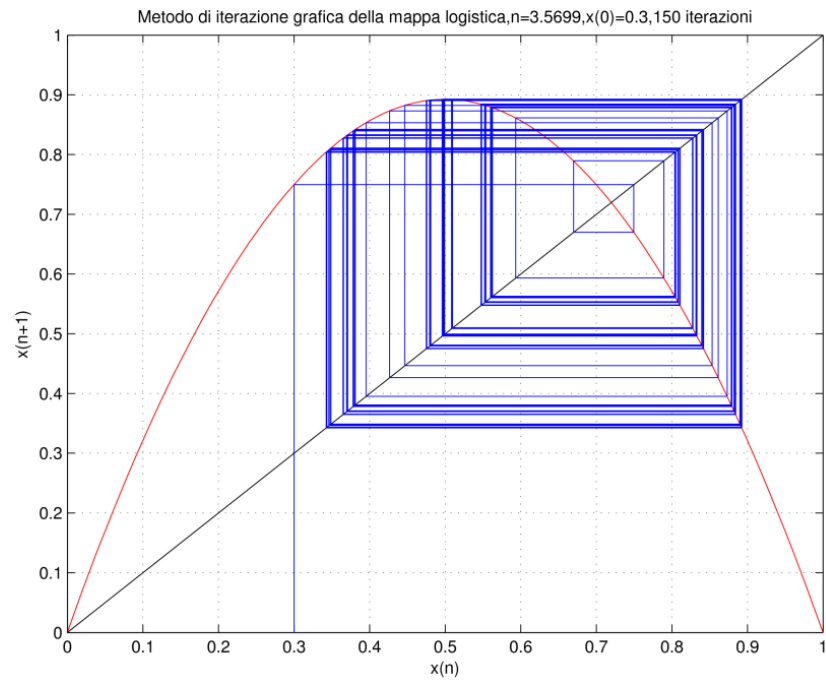


Fig. 3.37

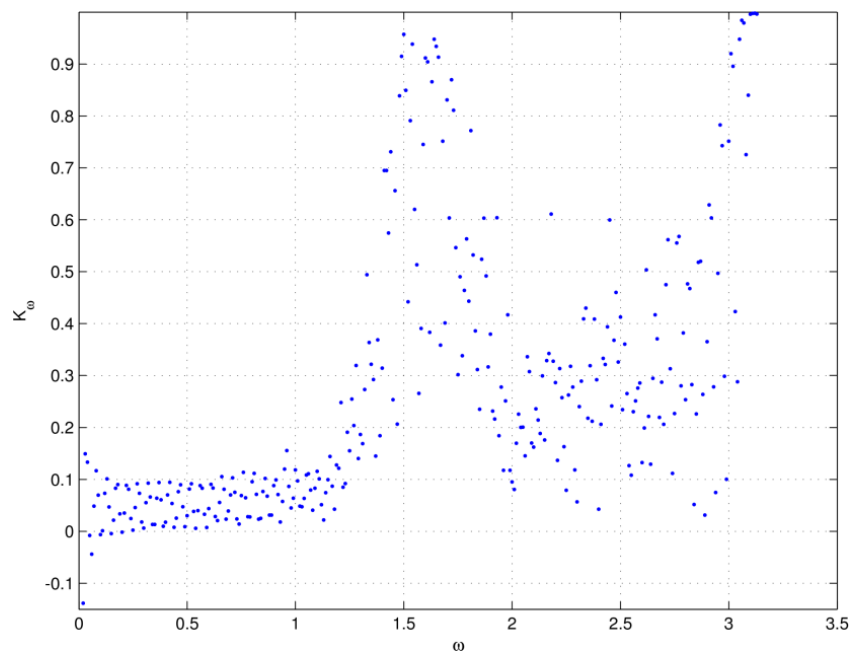


Fig. 3.38

Sia τ_s il tempo con cui viene campionata una serie numerica temporale x_j . In tal caso lo spostamento medio quadratico $M_\omega(m)$ è dato da:

$$M_{\omega}(m) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N-m} \sum_{j=1}^{N-m} \left\{ \left[\chi_{\omega\tau_s}(j+m) - \chi_{\omega\tau_s}(j) \right]^2 + \left[\zeta_{\omega\tau_s}(j+m) - \zeta_{\omega\tau_s}(j) \right]^2 \right\} \tau_s^2 \quad (3.75)$$

con $m=1,2,\dots,m^*$.

Ci poniamo, adesso, il problema di verificare se K_{ω} sia sensibile al problema del sovra-campionamento (*over-sampling*), ed in tal caso quale può essere la tecnica da impiegare per non incorrere in errori di valutazione circa l'evoluzione dinamica di una serie temporale qualsiasi.

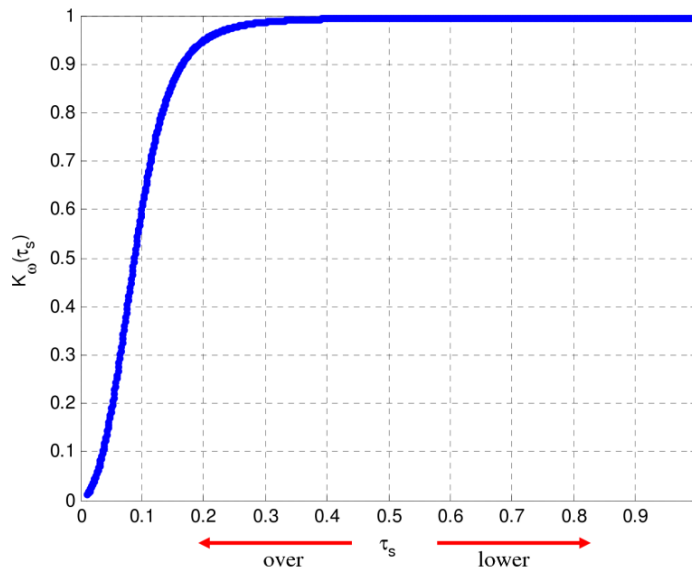


Fig. 3.39

La Fig. 3.39 chiaramente illustra il problema: all'aumentare del campionamento K_{ω} assume valori sempre più tendenti a zero il che ci indurrebbe ad ritenere come regolare l'andamento della mappa. Viceversa valori di $\tau_s > 0.2$ ci conducono a ritenere che l'evoluzione è del tutto caotica. Da qui la necessità di definire in maniera più rigorosa quali sono le condizioni e le ipotesi da valutare allorquando ci accingiamo a campionare un segnale acquisito su un sistema di cui non sono note le caratteristiche. Come è noto, uno spettro di potenza, nel caso ci riferiamo a sistemi regolari, è composto da una serie di picchi discreti, in cui è

possibile riconoscere almeno alcune ottave superiori se non addirittura la frequenza base.

Ricordiamo che per sistemi discreti lo spettro di potenza è dato da:

$$S(v) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} E \left[\left| \sum_{j=1}^N e^{2\pi i \frac{v}{v_s} j x(j)} \right|^2 \right] \tau_s^2 \quad (3.76)$$

dove $v=1/\tau_s$ è la frequenza di campionamento.

Viceversa, tale spettro, è del tutto *flat* per sistemi caotici. Anzi non essendo possibile stabilire una frequenza massima risulta oltremodo difficile poter rispettare la condizione di Shannon-Nyquist circa la frequenza di campionamento.

La scelta di τ_s non condiziona K_ω se la dinamica presenta un'evoluzione regolare ($\mu=2$) (Fig. 3.40), come invece accade per evoluzioni caotiche ($\mu=3.9$) (Fig. 3.39).

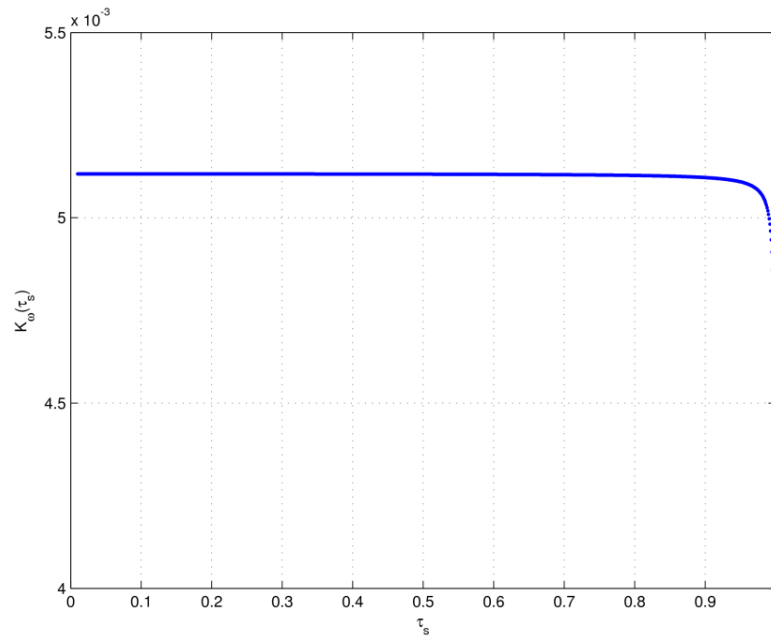


Fig. 3.40

Per $\mu=3.57$, cioè in condizioni di debole caoticità valgono le considerazioni fatte per l'evoluzione regolare. In tal caso il parametro K_ω solo apparentemente sembra risentire di un fenomeno di sovra/sotto-campionamento se ci riferiamo a

quanto riportato nel diagramma di Fig. 3.41; va tenuto presente che l'ordine di grandezza delle ordinate, in tal caso, è pari a 10^{-3} .

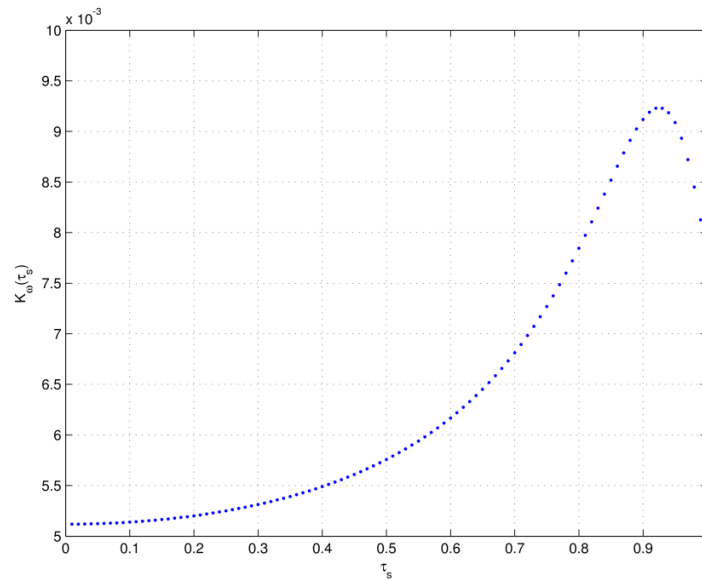


Fig. 3.41

Assegnata la mappa per $\mu=3.9$, la variazione di K_ω in funzione di τ_s può essere utilmente impiegata per stabilire il livello di campionamento ottimale e soprattutto per avere una prima indicazione circa la regolarità o meno della serie temporale. Infatti come si evince dalla Fig. 3.42, campionamenti via via decrescenti in termini di frequenza (ν_s) producono variazioni significative di K_ω al variare di τ_s segno evidente questo che la serie in studio è estremamente irregolare e che occorre fare molta attenzione alla frequenza di campionamento, non potendo nemmeno fare ricorso alla citata legge di Shannon-Nyquist. Viceversa una chiara indipendenza di K_ω da τ_s ci rassicura circa la frequenza di campionamento la quale può essere facilmente stabilita facendo ricorso ad uno spettro di frequenza, rispettando la legge di Shannon-Nyquist. La densità di campionamento, nel caso di evoluzioni pseudo regolari, può dipendere in genere dalla necessità da parte del ricercatore di ottenere un numero sufficiente di osservazioni nell'unità di tempo (u.d.t.²⁷) durante la quale egli intenda osservare fenomeni transienti ovvero la

²⁷ Per comodità di elaborazione delle serie temporali discrete estratte da segnali analogici, è comodo fare riferimento ad unità di tempo adimensionalizzate ricavabili facilmente dalla indicizzazione delle serie numeriche. Il riferimento alla unità di tempo dimensionalizzata è funzione della frequenza di campionamento.

presenza di *spike* ovvero andamenti la cui evoluzione temporale si risolve in frazioni di u.d.t.

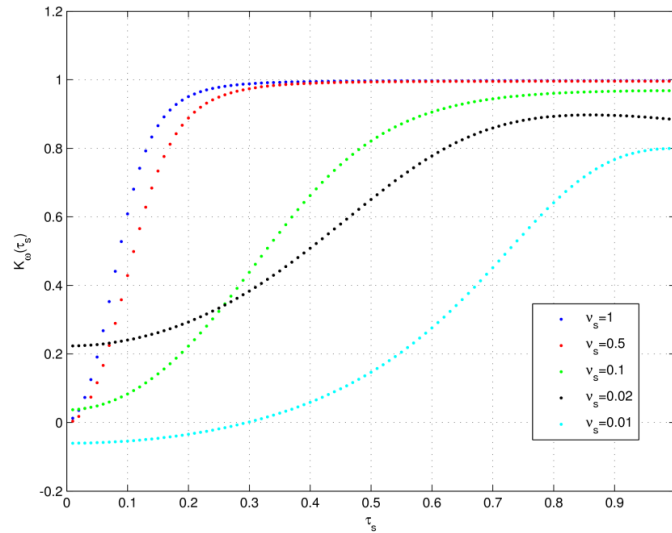


Fig. 3.42

Pertanto, prendendo in considerazione sia la Fig. 3.39 che la Fig. 3.42, possiamo affermare che, in presenza di una serie temporale caotica, in caso di over-sampling, cioè nel caso che $\Delta t \rightarrow 0$, allora $K_\omega \rightarrow 0$, cioè la serie verrebbe ad essere interpretata come pseudo regolare. Viceversa in caso di lower-sampling, cioè quando $\Delta t \rightarrow +\infty$ allora $K_\omega \rightarrow 1$ il che equivarrebbe a ritenere l'evoluzione della serie temporale di tipo pseudo-caotico. L'ambiguità può essere eliminata se, come detto, osserviamo l'andamento di K_ω in funzione di τ_s : la frequenza di campionamento ottimale è quella che meglio stabilizza l'andamento di K_ω .

3.7 Metodologia per la ricostruzione della PMIV e PIV vibrazionale

Con riferimento agli strumenti di *signal processing* illustrati si riporta la descrizione della metodologia per la ricostruzione della PMIV e PIV vibrazionale ©²⁸ (oggetto del Capitolo 6 della presente tesi).

Lo schema di Fig. 3.43 rappresenta il diagramma a blocchi della metodologia impiegata e di seguito descritta.

²⁸ Vedi bibliografia 1.

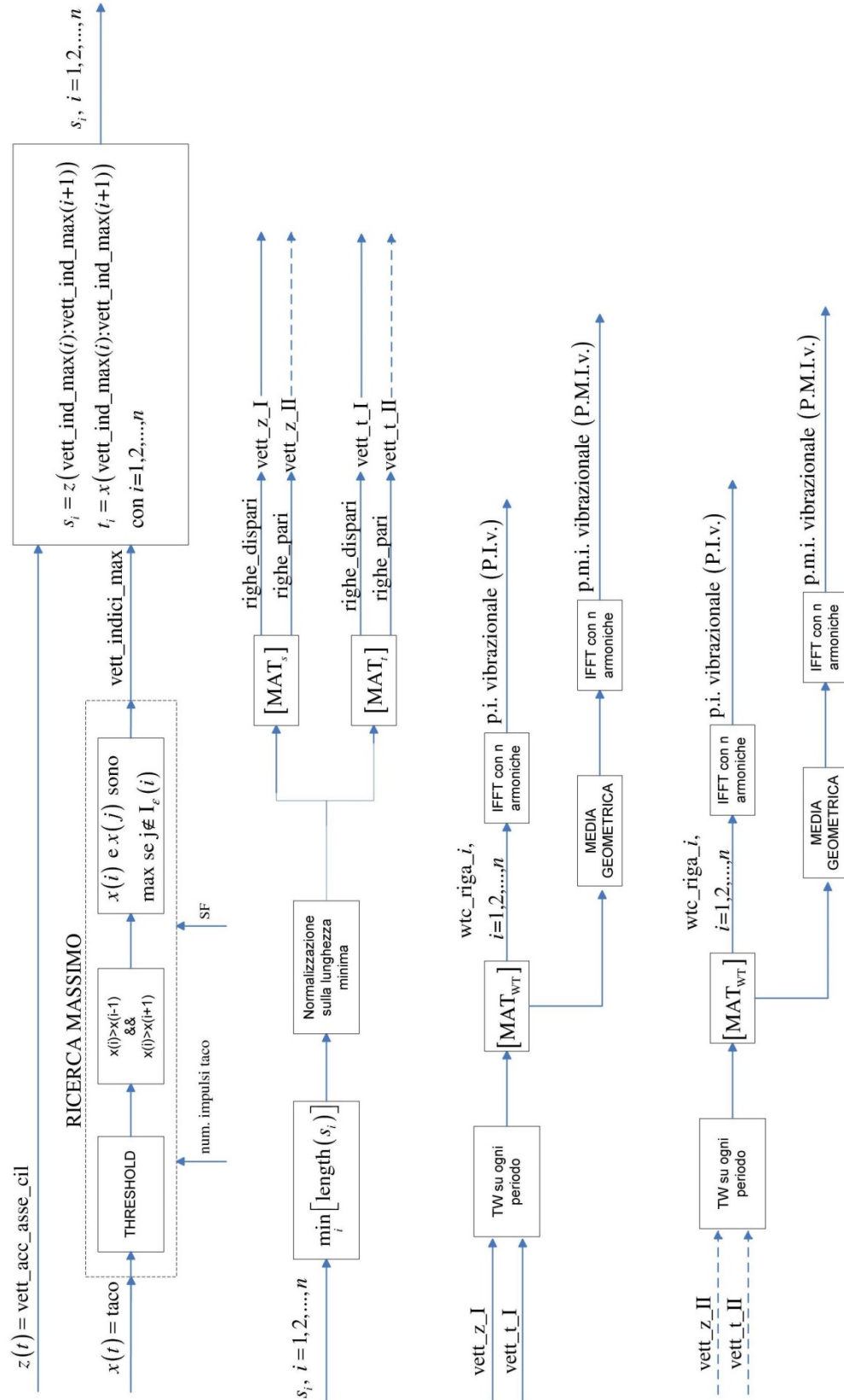


Fig. 3.43

Si precisa che nel seguito si è indicato, convenzionalmente, con I la coppia di cilindri 1-3 e con II la coppia 4-2 (con riferimento a quanto fatto per i risultati riportati nel Capitolo 6). In particolare faremo riferimento, salvo diversa indicazione, con la notazione I_1, I_2, \dots, I_n alla prima, alla seconda, all' n -esima detonazione della coppia di cilindri 1-3 e con II_1, II_2, \dots, II_n alla prima, alla seconda, all' n -esima detonazione relativa alla coppia di cilindri 4-2.

Sia $z(t)$ il segnale accelerometrico rilevato lungo l'asse z , asse del cilindro del motore. Sia $x(t)$ il segnale tachimetrico. Il macro-blocco etichettato con "Ricerca Massimo" ha il compito di identificare quei picchi del segnale tachimetrico che permettono di stabilire il periodo dell'albero motore. In ingresso a questo macro-blocco occorrono due informazioni: 1) numero di impulsi che il segnale tachimetrico fornisce per ogni giro dell'albero motore e 2) frequenza di campionamento SF (*sample frequency*) dei segnali (accelerometrico e tachimetrico). Il macro-blocco "Ricerca Massimo" identifica i picchi in base a 3 condizioni: la prima è quella che pone un *Threshold* al di sotto del quale il segnale è considerato rumore. Altra condizione è che, nell'ambito di una sequenza numerica, un punto può essere definito massimo e quindi "picco", se esso è contemporaneamente maggiore dell'elemento che lo precede e di quello che lo segue. Infine, una terza condizione, utile nel caso di sbalzi di tensione che possono creare doppi picchi, è che per riconoscere il massimo, e quindi il picco di interesse, è opportuno escludere quei picchi che, scelto un opportuno intorno del picco corrente, ricadono in quest'ultimo. Noti gli indici della successione numerica, e quindi le posizioni degli elementi che possiamo definire massimi, si possono estrarre dal segnale accelerometrico le sequenze generate durante un intero giro dell'albero motore (s_1, s_2, \dots, s_N). Siano, inoltre, t_1, t_2, \dots, t_N le sequenze tachimetriche associabili alle sequenze accelerometriche s_i , $i=1,2,\dots,N$. Tali sequenze, non avendo pari lunghezza, a causa del grado di irregolarità δ del motore, vengono normalizzate rispetto alla lunghezza minima (in tal modo ogni sequenza ha uguale numero di elementi). Successivamente, tali sequenze vanno a comporre le righe di una matrice $[MAT_s]$, mentre le corrispondenti sequenze tachimetriche vanno a comporre la matrice $[MAT_t]$. Da tali matrici è possibile estrapolare le righe pari e le righe dispari, in modo da poter far riferimento ad

omologhe sequenze di accensione. Tali righe andranno a comporre i vettori: vett_z_I (vettore segnale accelerometrico composto dalle sequenze relative alle righe di $[\text{MAT}_s]$ dispari), vett_z_II (vettore segnale accelerometrico composto dalle sequenze relative alle righe di $[\text{MAT}_s]$ pari), vett_t_I (vettore segnale tachimetrico composto dalle sequenze tachimetriche relative alle righe di $[\text{MAT}_t]$ dispari) e vett_t_II (vettore segnale tachimetrico composto dalle sequenze tachimetriche relative alle righe di $[\text{MAT}_t]$ pari).

La convoluzione tra il vett_z_I opportunamente selezionato attraverso il vett_t_I ed opportuna funzione wavelet, genera la matrice $[\text{MAT}_{\text{WT}}]$, composta da N righe di coefficienti wavelet. Interpolando ogni riga della matrice $[\text{MAT}_{\text{WT}}]$, attraverso la funzione IFFT e con un numero opportuno di armoniche, si ottengono gli andamenti delle N pressioni istantanee vibrazionali (PIv). Effettuando sugli elementi della matrice $[\text{MAT}_{\text{WT}}]$ una operazione di media geometrica e successivamente interpolando a mezzo IFFT con n armoniche il vettore ottenuto si ricostruisce la cosiddetta PMIv vibrazionale.

Analogo processamento è ripetuto per le sequenze pari dove questa volta i vettori vett_z_II e vett_t_II sono messi in convoluzione con opportuna funzione wavelet. Come detto in precedenza si ottiene la matrice $[\text{MAT}_{\text{WT}}]$ composta da N righe di coefficienti wavelet. Da essi con analogo procedimento già descritto si ottengono le PMIv e PIV vibrazionali.

Capitolo 4

Alcune considerazioni tecniche in merito agli accelerometri

4.1 Introduzione

Molti sono gli strumenti che la tecnologia moderna ha consentito di mettere a punto per la rilevazione e la misurazione delle vibrazioni.

Siamo passati dai frequenzimetri ai vibrometri e vibrografi a tasto sonda di tipo meccanico o elettromagnetico, fino ai più moderni accelerometri sismici. Tra questi ultimi ricordiamo l'accelerometro piezoelettrico cosiddetto a taglio.

Una vibrazione può anche essere misurata mediante trasduttori di prossimità di tipo elettromagnetico, capacitivo o acustico. I torsio-vibrometri, come pure gli accelerometri angolari vengono impiegati per la misurazione delle vibrazioni torsionali. Vibrazioni possono essere misurate anche mediante la registrazione delle deformazioni da esse indotte. In questi casi facciamo uso di estensimetri per vibrazioni flessionali o torsionali. Non ultimo ricordiamo l'impiego anche di sistemi stroboscopici ed ottici.

Indirettamente l'analisi vibrazionale può essere condotta eccitando la struttura meccanica a mezzo di forze sinusoidali di ampiezza e frequenza prestabilite. In tali casi ricorriamo a particolari eccitatori armonici o di vibrazione meglio noti con il nome di "vibroline" ovvero di eccitatori elettro-meccanici.

Per tutti questi strumenti richiamati rimandiamo il lettore alla letteratura specializzata, qui ci preme, invece, sottolineare e mettere a fuoco alcuni aspetti teorici e pratici relativi al principale strumento di misurazione delle vibrazioni: l'accelerometro.

4.2 Accelerometri: aspetti teorici e tecnici

Come già accennato una vibrazione può essere rilevata attraverso accelerometri, cioè attraverso trasduttori vibrazionali capaci di convertire variazioni di grandezze meccaniche (ingresso) in variazioni di grandezze di tipo elettrico (uscita) proporzionali ai segnali di ingresso. Essi si dividono in due grosse categorie:

- 1) Trasduttori attivi, se sono autonomi e non abbisognano di essere alimentati elettricamente
- 2) Trasduttori passivi, se invece hanno bisogno di sorgenti elettriche esterne.

Generalmente i trasduttori sono di tipo piezoelettrico (ad es. quarzo) capaci cioè di generare, se vengono sollecitati meccanicamente, cariche elettriche proporzionali alla forza, ad esempio, di compressione applicata ad esso.

Nel qual caso, detta q la carica elettrica che si genera per effetto della forza F abbiamo: $q=kF$.

Nel caso del quarzo la costante k piezoelettrica vale circa 2×10^{-12} Coulomb/Newton.

Il modello che meglio permette di rappresentare una tale condizione fisica è quello riportato di seguito in Fig. 4.1.

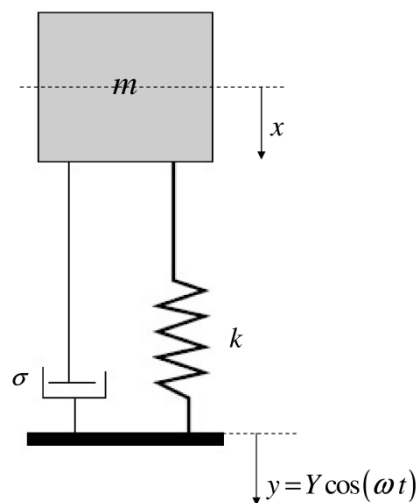


Fig. 4.1

Poiché uno strumento piezoelettrico (accelerometro) funziona sul principio del moto relativo tra una massa m libera di muoversi verticalmente (1 g.d.l.) rispetto ad una base a cui essa è fissata, tali strumenti sono chiamati anche sismici. Se indichiamo con $s=x-y$ lo spostamento relativo della massa m rispetto alla base sottoposta ad un moto oscillatorio

$$y = Y \cos(\omega t), \quad (4.1)$$

come è noto avremo che

$$s = S \cos(\omega t - \psi), \quad (4.2)$$

dove

$$S = \frac{Y \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$\operatorname{tg}(\psi) = \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{e} \quad \zeta = \frac{\sigma}{2m\omega_0}.$$

Le principali proprietà che richiediamo ad un accelerometro sono costituite dalla precisione della risposta in particolare delle ampiezze vibrazionali, nonché la minimizzazione della sfasatura tra la vibrazione e la sua rilevazione. A tal fine è utile calcolare il rapporto η tra l'ampiezza F della forza applicata all'accelerometro e quella dell'accelerazione della base moltiplicata per la massa m :

$$\eta = \frac{F}{m\omega^2 Y} = \frac{\sqrt{1 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}, \quad (4.3)$$

nonché lo sfasamento ε tra la forza e l'opposto dell'accelerazione

$$\varepsilon = \psi - \arctg\left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_0}\right). \quad (4.4)$$

È interessante diagrammare le funzioni (4.3) e (4.4) (Fig. 4.2 e Fig. 4.3).

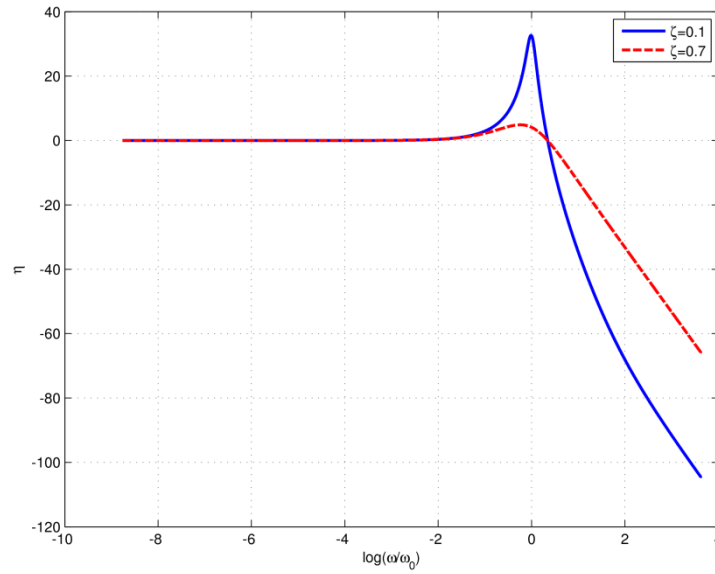


Fig. 4.2

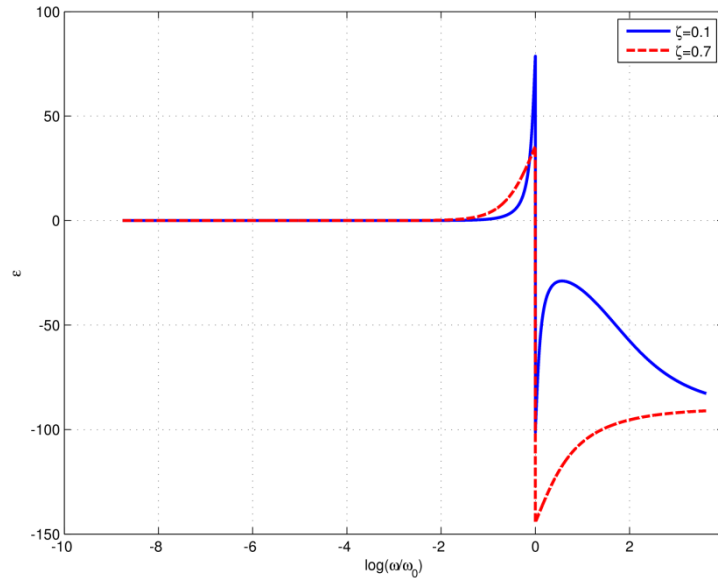


Fig. 4.3

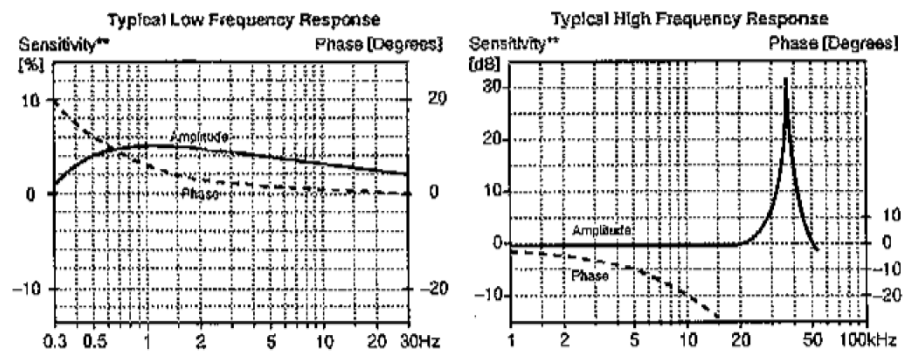


Fig. 4.4

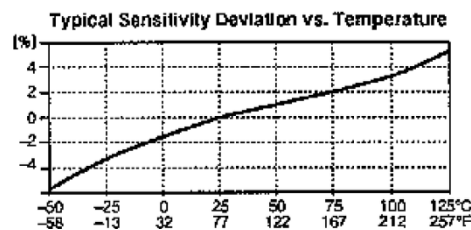


Fig. 4.5

Ricordiamo che di accelerometri piezoelettrici ce ne sono attualmente di vari tipi. In particolare vogliamo ricordare gli **accelerometri piezoelettrici a compressione** e quelli **a taglio**. I primi possono generare una serie di errori a causa delle deformazioni prodotte da flessioni o variazioni di temperatura dei suoi componenti, che possono alterare in maniera significativa i valori di σ . Molto più affidabili sono gli accelerometri a taglio, dove le masse (in genere 3), sono

collegate secondo uno schema prismatico a forma di delta. Questo particolare montaggio evita inoltre l'incollaggio delle masse o la loro sistemazione con viti e adesivi a tutto vantaggio dell'affidabilità e della precisione.

La **sensibilità** (*sensitivity*) è un altro parametro che dobbiamo valutare bene. Essa è misurata in pC/ms^{-2} o mV/g , che esprime la quantità di carica elettrica generata per unità di accelerazione (generalmente nei *data-sheet* è riportata con la simbologia S_q).

Se invece l'uscita è misurata in tensione, allora la sensibilità è misurata in mV/ms^{-2} (simbolicamente indicata con S_v). Il cosiddetto **campo di impiego** è un fattore caratteristico dell'accelerometro. Esso è limitato, sia superiormente che inferiormente, per problemi di linearità di risposta (Fig. 4.4, Fig. 4.5)

Tali parametri sono riportati in genere in fogli di calibrazione, *data-sheet*, specifici di ogni singolo strumento di misura.

Non ultimo vogliamo ricordare il **metodo di montaggio**. Esso può essere di vari tipi, ognuno dei quali comporta vantaggi e svantaggi più o meno importanti circa l'affidabilità della risposta accelerometrica dello strumento. Le condizioni di montaggio devono garantire un solidale e rigido collegamento tra lo strumento accelerometrico ed il sistema vibrante. Il montaggio più affidabile è quello che viene effettuato attraverso la collocazione di un grano filettato su cui viene avvitato l'accelerometro (Fig. 4.6)

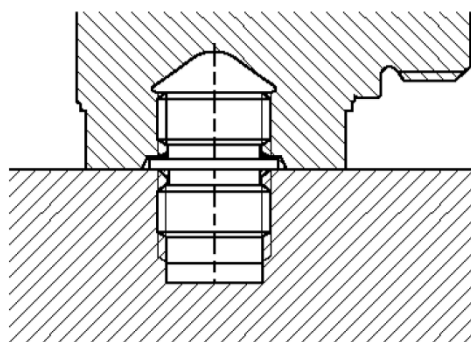


Fig. 4.6

Le condizioni di montaggio devono comunque garantire l'appoggio dell'accelerometro su una superficie piana, liscia, con interposizione di grasso su entrambe le superfici che vengono a contatto. In alcuni casi vengono impiegati

collanti di tipo epossidico o meglio ancora il ciano-acrilico che consente di avere collegamenti più rigidi. Ancora, è possibile utilizzare nastri biadesivi meglio se di spessore sottile. In alcuni casi, può essere impiegata, laddove le condizioni tecniche lo consentano, anche la cera d'api. È da sottolineare comunque, a parte il primo montaggio di tipo meccanico, che tutti gli altri comportano un peggioramento della risposta accelerometrica, in alcuni casi anche sensibile, in quanto inducono nello strumento una variazione del coefficiente di smorzamento.

Va da sé che nella scelta di un accelerometro un altro importante parametro è quello relativo alla **frequenza di risonanza**, che in genere è riportato nei data-sheet di calibrazione allegati agli strumenti accelerometrici.

Abbiamo detto che un accelerometro sismico è modellabile come in Fig. 4.7.

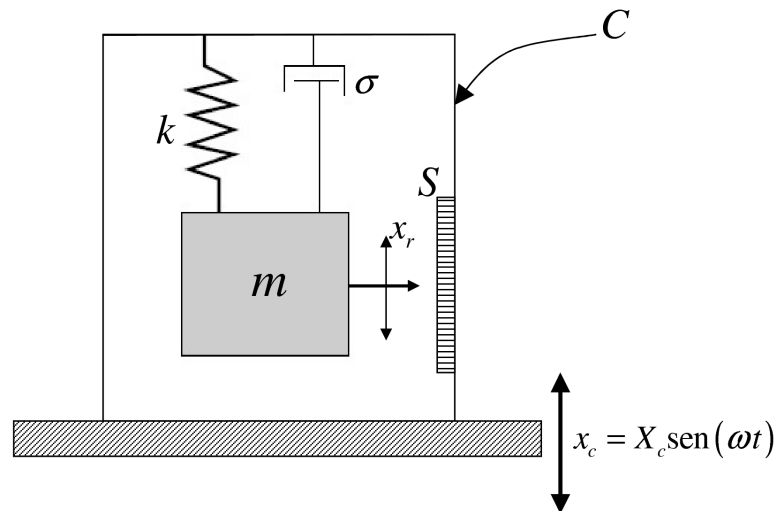


Fig. 4.7

Analizziamo più in dettaglio un tale schema. In esso x_c è l'ampiezza della vibrazione della cassa C e quindi della vibrazione ad essa trasmessa dal sistema vibrante; x_r è il moto della massa m rispetto alla cassa C che potremmo misurare, ad esempio, rispetto ad una scala S opportunamente graduata. Pertanto se chiamiamo x_m il moto relativo assoluto della massa, deve essere:

$$x_m = x_r + x_c . \quad (4.5)$$

Ciò premesso, l'equazione del moto della massa m sarà data da:

$$m\ddot{x}_m + \sigma\dot{x}_r + kx_r = 0 \quad (4.6)$$

in cui abbiamo supposto che σ e k esercitino la loro influenza solo sulla massa m e quindi sul suo moto relativo x_r rispetto alla cassa C .

Se sostituiamo la (4.5) nella (4.6) otteniamo:

$$m \frac{d^2(x_r + x_c)}{dt^2} + \sigma\dot{x}_r + kx_r = 0$$

e quindi

$$m\ddot{x}_r + m\ddot{x}_c + \sigma\dot{x}_r + kx_r = 0 .$$

L'ultima equazione può essere riscritta come segue, in cui si evidenzia l'azione forzante esterna che agisce sulla cassa esterna C :

$$m\ddot{x}_r + \sigma\dot{x}_r + kx_r = -m\ddot{x}_c . \quad (4.7)$$

Se è noto il moto di x_c , allora

$$x_c = X_c \sin(\omega t),$$

abbiamo che la (4.7) diventa:

$$m\ddot{x}_r + \sigma\dot{x}_r + kx_r = m\omega^2 X_c \sin(\omega t) . \quad (4.8)$$

La (4.8) è l'equazione del moto di una massa m avente un grado di libertà che oscilla, con caratteristiche dinamiche definite da m , σ e k , ed è sottoposta all'azione di una forza esterna periodica di ampiezza $m\omega^2 X_c$ avente pulsazione ω .

L'oscillazione relativa x_r della massa m è data pertanto da:

$$x_r = X_r \sin(\omega t - \varphi) \quad (4.9)$$

dove

$$X_r = \frac{m\omega^2 X_c}{k} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \frac{\sigma}{\sigma_c} \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad (4.10)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4.11)$$

$$\sigma_c = 2\sqrt{km} \quad (4.12)$$

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{2 \frac{\sigma}{\sigma_c} \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}. \quad (4.13)$$

È utile diagrammare il rapporto

$$\frac{X_c}{X_m} = f\left(\frac{\omega}{\omega_n}, \frac{\sigma}{\sigma_c}\right) \text{ e } \operatorname{tg}(\varphi) = f\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right),$$

dove σ/σ_c è un parametro. Nota la(4.11), la (4.10) diventa:

$$\frac{X_r}{X_c} = \frac{\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \frac{\sigma}{\sigma_c} \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}. \quad (4.14)$$

Se lo smorzamento è nullo ($\sigma = 0$) allora dalla (4.14), per $\omega = 0$, otteniamo che $X_r = 0$ mentre se il rapporto $(\omega/\omega_n) = 1$ allora siamo in presenza di risonanza ed infatti $(X_r / X_c) \rightarrow +\infty$. Se $(\omega/\omega_n) \rightarrow \infty$ allora $(X_r / X_c) \rightarrow 1$ ed in particolare abbiamo che $(X_r = -X_c)$ da cui, stante la (4.5) ricaviamo che $x_m = 0$, cioè la massa non si sposta e pertanto abbiamo ricavato un punto fisso di riferimento.

In realtà è sempre $\sigma \neq 0$, pertanto il diagramma di X_r / X_c si modifica come in Fig. 4.8.

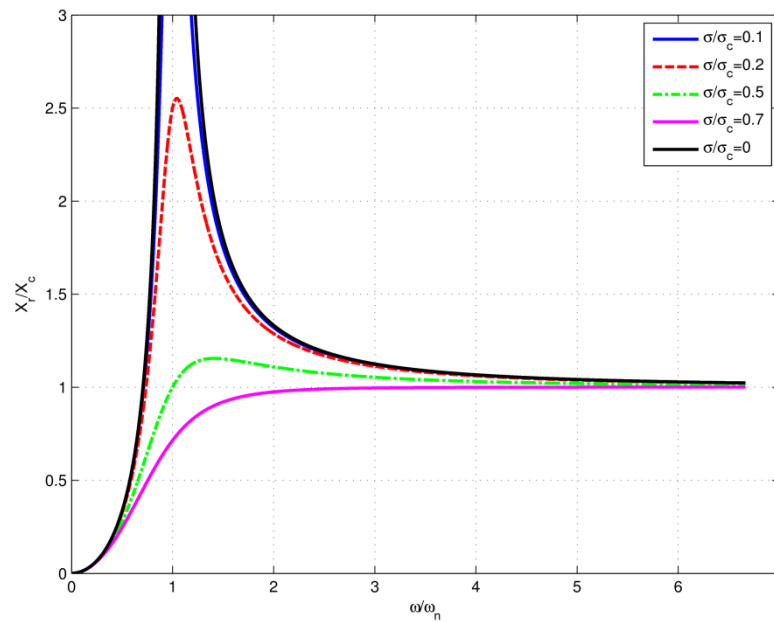


Fig. 4.8

Infine se $\omega \gg \omega_n$ otteniamo che $|X_r| \approx X_c$ e quindi otteniamo che lo strumento ci fornisce la vibrazione che intendiamo misurare.

Questi tipi di accelerometri possono, sotto certe condizioni, generare risposte artefattuate: **distorsione di ampiezza** e **o di fase**.

Le suddette distorsioni, e quindi gli errori di misurazione da esse prodotte, le possiamo evitare se, detta ω_1 la pulsazione dell'armonica fondamentale è: $\omega_1 \gg \omega_n$. Analogamente per ridurre la distorsione di fase oltre alla condizione ora stabilita occorre anche che sia: $\sigma \ll \sigma_c$.

Il ragionamento testé fatto è del tutto generale. In realtà, com'è noto, una vibrazione è composta da un numero infinito di armoniche di cui soltanto un

numero finito (serie di armoniche) risultano significative in termini di ampiezza. Pertanto possiamo scrivere che tale serie è data da:

$$x_i = \sum_{i=1}^n X_{c,i} \text{sen}(\omega_i t + \psi_i). \quad (4.15)$$

Se vi è distorsione di ampiezza (ad esempio sulla m^a armonica) allora questa sarà registrata con ampiezza diversa da quella reale. Vediamo di chiarire meglio questo punto. Per fare ciò riprendiamo la (4.14) e riscriviamola come segue:

$$\frac{\omega_n^2}{\omega^2} \frac{X_r}{X_c} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \frac{\sigma}{\sigma_c} \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}. \quad (4.16)$$

Riportiamo la (4.16) in un diagramma come in Fig. 4.9.

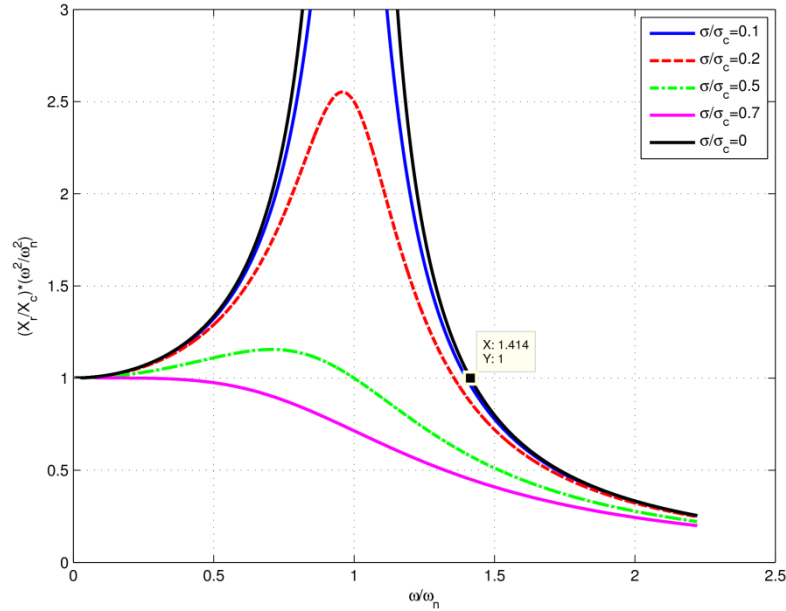


Fig. 4.9

Notiamo che al denominatore del primo membro della (4.16) compare la grandezza $\omega^2 X_c$. Ricordando che:

$$x_c = X_c \sin(\omega t)$$

rappresenta lo spostamento della cassa C dell'accelerometro posto a contatto con il sistema vibrante, allora $\omega^2 X_c$ è la sua accelerazione, e di conseguenza è l'accelerazione del sistema a cui esso è collegato. Affinché l'accelerometro registri una reale ampiezza vibratoria deve essere dalla (4.16)

$$\frac{\omega_n^2}{\omega^2} \frac{X_r}{X_c} = 1. \quad (4.17)$$

Ciò accade se (Fig. 4.9) $\omega / \omega_n \ll 1$ cioè $\omega_n \gg \omega$.

Osserviamo dalla Fig. 4.9 che $\omega / \omega_n \approx 1.41$ rappresenta il limite superiore di tale rapporto, infatti esso è dato dalla condizione limite teorica $\sigma = 0$ a cui corrisponde la (4.17). Il secondo membro della (4.16) lo possiamo definire come il coefficiente di amplificazione dell'ampiezza. Nel caso che l' m^a armonica della serie (4.15) avesse una frequenza $\omega_m \approx \omega_n$ allora, se σ è sufficientemente grande, potremmo attenuare la distorsione di ampiezza (Fig. 4.9). In genere gli accelerometri hanno un $\sigma \approx 0.7\sigma_c$.

Infine ricordiamo anche la distorsione di fase. Essa è data da:

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{2 \frac{\sigma}{\sigma_c} \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}. \quad (4.18)$$

Se diagrammiamo la (4.18) (Fig. 4.10) notiamo che per $\sigma \approx 0.7\sigma_c$ la curva è prossima ad una curva passante per l'origine.

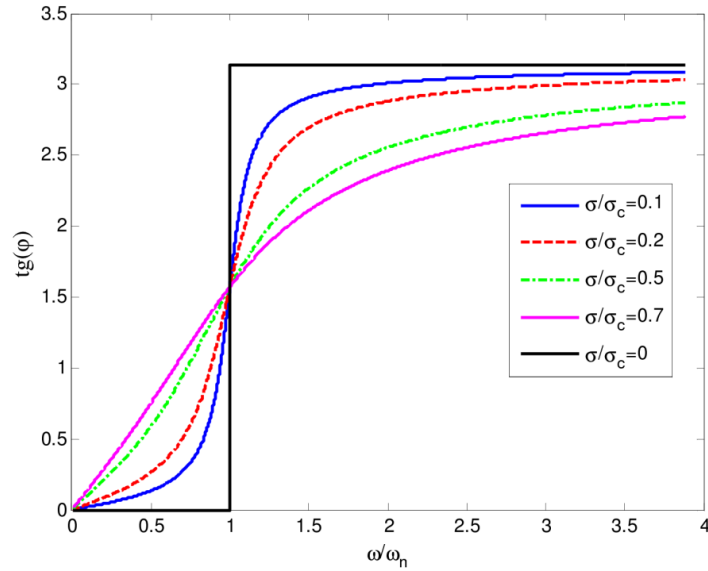


Fig. 4.10

Di conseguenza, possiamo ritenere con buona approssimazione:

$$\frac{\phi_i}{\omega_i} \approx \text{costante} . \quad (4.19)$$

La (4.19), rappresenta il ritardo di fase con cui vengono registrate le varie armoniche; essendo tale rapporto una costante tutte le armoniche vengono registrate con la stessa distorsione di fase che, perciò, possiamo ritenere costante.

Ricordiamo, infine, che per **smorzamento critico** σ_c intendiamo il più piccolo valore del coefficiente di smorzamento σ per cui si verifica che la massa m , qualora venga allontanata dalla sua posizione di equilibrio non entra mai in oscillazione. Tale valore è dato da:

$$\sigma_c = 2\sqrt{mk} ,$$

con ovvio significato dei simboli.

Capitolo 5

Monitoraggio vibrazionale di un cambio automobilistico

5.1 Introduzione

La messa a punto della nuova tecnica sperimentale di monitoraggio vibrazionale per la diagnosi in tempo reale di eventuali anomalie riscontrate su un cambio automobilistico, è sorta da un caso aziendale nel momento in cui, a seguito di diverse prove di durata (*durability test*), si sono verificate rotture improvvise degli organi rotanti che hanno comportato danni gravi tali da non poter consentire una diagnosi certa. Difatti, il solo semplice danneggiamento da parte di un dente, può inevitabilmente precludere l'indagine volta alla ricerca delle reali cause che lo hanno prodotto. Se non si interviene preventivamente sull'incipiente danno, è molto difficile che questo non vada ad influenzare e ad interferire con altri organi meccanici presenti nel cambio.

Da qui la necessità di una messa a punto di una metodologia integrata che consenta di arrestare le prove di durata, a cui sono sottoposti i cambi, in largo anticipo, cioè al verificarsi dei segnali premonitori del futuro danneggiamento.

Lo svolgimento dell'attività scientifica ha avuto luogo in seno al gruppo afferente al Dipartimento di Ingegneria Industriale, Sez. Meccanica ed Energetica (ex DiME) della Facoltà di Ingegneria dell'Università degli Studi di Napoli, Federico II.

I segnali vibratorii relativi a sistemi meccanici complessi sono spesso impiegati per la diagnosi di anomalie meccaniche, ciò perché essi portano informazioni dinamiche prodotte dalle stesse macchine. Comunque, queste vibrazioni, anche se ben campionate, contengono sempre molto rumore. Se il rumore è molto forte allora anche le informazioni più importanti possono essere corrotte al punto tale che non si riesce a riconoscere il reale stato del sistema meccanico o addirittura si rischia di arrivare ad errate conclusioni. Perciò, sono

stati messi a punto molti metodi per l'estrazione di caratteristiche da segnali affetti da *noise*.

L'analisi a mezzo Trasformata Wavelet è uno di tali potenti *tool*. Esso rappresenta un avanzato sistema di *signal processing* impiegabile anche se il segnale da analizzare è non stazionario.

Nel campo della diagnosi di problemi meccanici l'analisi attraverso Wavelet è impiegata per la diagnosi di molti componenti meccanici: cuscinetti, gear-box, motori, ecc.

Notiamo che per molti segnali dinamici di origine meccanica, le caratteristiche dei componenti sono di carattere impulsivo. Molti degli odierni metodi presenti in letteratura non sono affidabili se l'operazione è quella di identificare componenti impulsive ricoperte da rumore.

Pertanto abbiamo approntato una nuova metodica utile per il *denoising*. Essa può trovare applicazione in special modo per l'estrazione di componenti impulsive.

5.2 Descrizione della prova di durata

Di seguito si riporta brevemente la modalità con cui è eseguita la prova di durata. Essa viene effettuata solo dopo che il cambio ha superato la prova di lubrificazione, dopodiché si effettua un rodaggio in tutte le marce durante il quale il cambio funziona a basse velocità di rotazione (2000-2500 giri/min) con bassi valori di coppia (circa il 10% della coppia massima). Una volta terminata questa fase, dopo la sostituzione dell'olio lubrificante, può avere inizio la prova di affidabilità (*durability test*).

La prova prevede che il cambio percorra un certo numero di chilometri in tutte le marce, sia in condizioni di coppia massima che di potenza massima. La coppia e la potenza massima, e le relative velocità di rotazione, sono stabilite in base al motore a cui il cambio sarà accoppiato. Nel caso in esame la prova è stata eseguita in prima velocità in quanto, proprio in tale condizione era stato riscontrato un problema di affidabilità. Per il tipo di cambio monitorato, le velocità di rotazione adottate sono state:

- condizione di coppia massima, 2500 giri/min
- condizione di potenza massima, 4000 giri/min

Nell'ambito di questa prova il banco viene comandato impostando all'uscita dei semiassi una coppia pari a 4160 Nm, tale da avere in ingresso al primario del cambio una coppia pari a 260 Nm, tenendo conto del rapporto di trasmissione.

La distanza complessiva che il cambio deve percorrere è stabilita: indichiamo con D_1 la distanza complessiva che il cambio deve percorrere in prima marcia. Tale distanza non viene percorsa in un unico step, ma attraverso N steps di uguale lunghezza $d_1 = D_1/N$. Il valore scelto per N è 100, così che se un cambio non presenta alcun tipo di difetto dopo 100 step, si dice che ha raggiunto il 100% del ciclo prova.

Come detto precedentemente, ogni step a sua volta comprende due fasi: la prima in cui il cambio è nelle condizioni di coppia massima, la seconda in cui è nelle condizioni di potenza massima.

Le distanze previste per queste due fasi, che indichiamo con d_{lc} e d_{lp} , sono anch'esse fissate, e sono tali che $d_{lc} + d_{lp} = d_1$. Poiché si è stabilito che il cambio raggiunge il 100% del ciclo prova se percorre, in prima marcia, una distanza di 4000 km, si può ottenere la distanza percorsa per ogni step, da cui conoscendo d_{lc} e d_{lp} , si ha che la durata della fase nella condizione di coppia massima è $t_{lc} = 190$ secondi, mentre quella in condizione di potenza massima è $t_{lp} = 61$ secondi.

Di seguito si descrive la sequenza di step che compongono il ciclo di durata. Il banco aumenta la velocità dell'albero primario fino al valore corrispondente alla coppia massima; una volta raggiunta questa velocità viene gradualmente applicata la coppia, fino al massimo valore previsto. Il tempo che il banco impiega per portarsi alla velocità prevista e quello impiegato per applicare la coppia sono stabiliti, e sono detti *tempi di rampa (ramp time)*. Il cambio, in prima marcia, percorre i previsti d_{lc} km in condizioni di coppia massima, dopodiché la coppia viene abbassata al 10% circa della coppia massima; la velocità aumenta fino a quella corrispondente alla potenza massima, e successivamente viene applicata la coppia fino al valore corrispondente alla potenza massima. In queste condizioni il cambio percorre i previsti d_{lp} chilometri in potenza massima.

Una volta percorsa questa distanza, è previsto uno step “*di riposo e lubrificazione*” durante il quale il cambio è in sesta marcia. La velocità in ingresso all’albero primario è tale che i semiassi, e quindi il differenziale, ruotino ad una velocità pari a circa 1000 giri/min. Lo scopo di questa fase è quello di raffreddare l’olio lubrificante e, contemporaneamente, di lubrificare tutte le parti del cambio.

Terminato lo step di “riposo”, ne inizia un altro in condizioni di coppia massima e potenza massima che si svolge con le stesse modalità. Un cambio che non presenti difetti è tale da superare senza problemi tutti gli N steps programmati.

Schematizzando (Tab. 5.1):

Marcia	Distanza Totale Prevista	Da ripetere N volte		Totale
Prima	D_1	Distanza in Coppia Max	Distanza in Potenza Max	D_1
		D_{1C}/N (tempo di percorrenza t_{1C})	D_{1P}/N (tempo di percorrenza t_{1P})	

Tab. 5.1

5.3 Allestimento cambio

Il cambio è a 6 marce con architettura a tre assi. La peculiarità principale di questo tipo di cambio è quella di presentare minori ingombri longitudinali rispetto ai cambi a due assi di pari taglia, cioè di pari coppia massima trasmissibile. Ciò comporta il vantaggio di avere a disposizione, nel vano motore, più spazio per gli accessori (come, ad esempio, climatizzatore, idroguida, etc.) e di ottenere un maggior angolo di sterzata delle ruote qualora ve ne fosse la necessità.

Lo schema descrittivo dell’architettura del cambio è riportato in Fig. 5.1.

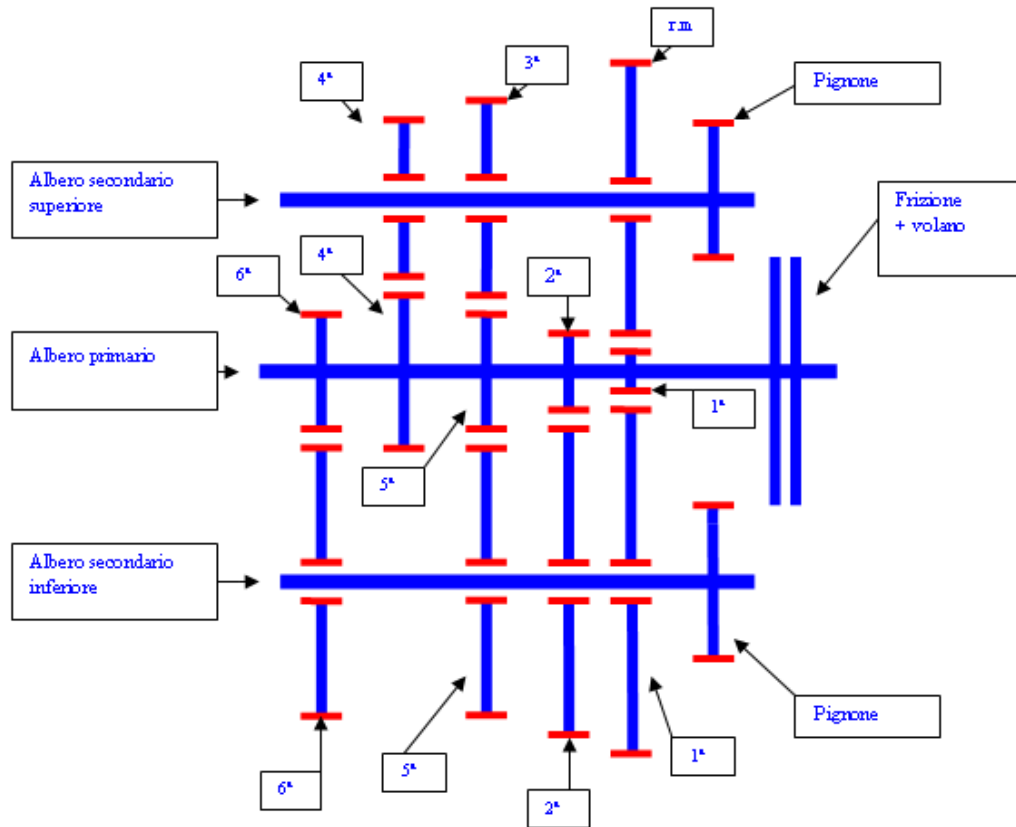


Fig. 5.1

La metodologia di monitoraggio utilizzata fa uso di un solo accelerometro Brüel & Kjær, tipo 4384 (vedi Appendice B.3). Esso è un accelerometro piezoelettrico, monoassiale, posizionato nella parte esterna alla scatola cambio (Fig. 5.2).

La nuova metodologia è finalizzata ad interrompere la prova in maniera preventiva qualora si verifichi un incipiente inizio di rottura per uno qualsiasi dei rotismi del cambio.

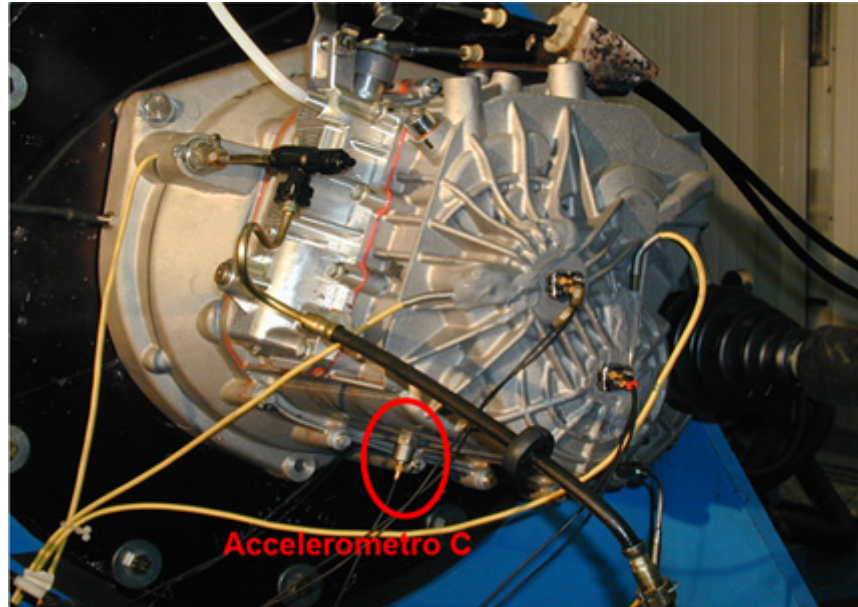


Fig. 5.2

5.4 Risultati ottenuti con la vecchia metodologia di monitoraggio

Il precedente algoritmo di monitoraggio pone le sue basi nell'analisi vibrazionale alla Fourier. Esso, infatti, valuta l'area sottesa allo spettro del segnale accelerometrico correntemente acquisito, e rende automatizzato il fermo prova attraverso la creazione di un indice, $\Delta\%(Area_cor/Area_rif)$, che tiene conto della variazione percentuale dello spettro all'istante corrente, $Area_cor$, rispetto allo spettro preso come riferimento $Area_rif$, ossia

$$\Delta\%(Area_cor/Area_rif) = 100 * \left(\frac{Area_Cor - Area_rif}{Area_rif} \right)$$

Questo è un indice globale che viene monitorato istante per istante. In normali condizioni di funzionamento, durante un ciclo di prova, l'area dello spettro corrente non cambia; in tal caso tale indice ha un valore prossimo allo 0(%). Se nel corso della prova si registra un innalzamento complessivo dello spettro corrente tale da far risultare l'indice $\Delta\%(Area_cor/Area_rif)$ superiore al valore di soglia, settata al 20%, allora si procede al fermo prova.

Utilizzando tale tipo di approccio si è ottenuto un fermo prova circa 13s prima che gli organi del cambio cedessero completamente.

Come è evidente il limite di questa metodica risiede nell'utilizzo di un solo indicatore realizzato attraverso metodiche di analisi spettrale poco sensibili e poco specifiche per tale tipo di monitoraggio.

L'integrazione di metodologie non lineari, di metodiche afferenti alla Teoria del Caos, nonché l'utilizzo della Trasformata Wavelet, opportunamente impiegate, restituiscono, come vedremo, risultati molto più sensibili ed affidabili.

5.5 Principali problematiche affrontate

Le ragioni che hanno portato allo sviluppo di questo nuovo approccio risiedono nella coscienza che l'analisi Wavelet, pur garantendo elevata specificità, possiede caratteristiche di sensibilità più spinte. Ciò consente di rilevare la presenza di eventuali anomalie in maniera più repentina ed affidabile.

Ovviamente una ispezione sollecitata da rilevazioni di andamenti anomali delle dinamiche osservate, ha maggiore impatto se non si sono ancora verificate deformazioni plastiche negli organi costituenti il cambio. Una loro presenza, infatti, renderebbe estremamente difficile risalire alle cause generatrici e di conseguenza alla sua riprogettazione e/o modifica di componenti del cambio stesso.

Qui di seguito si premettono alcune problematiche che hanno reso estremamente complessa la progettazione della metodica nonché la successiva messa a punto del nuovo algoritmo di calcolo.

Come già più volte anticipato la tesi di Dottorato nel campo della meccanica fredda si è posta come obiettivo la individuazione precoce di anomalie incipienti su di un pignone di un cambio per *automotive*.

La ricerca ha tanto più valore in quanto ci siamo trovati di fronte ad una serie di problemi da risolvere:

- a) tipologia di danneggiamento delle ruote dentate che va sotto il nome di *pitting* (quindi di difficile diagnosi in quanto molto *soft* nella sua dinamica evolutiva);
- b) campionamento del segnale accelerometrico pari a 4096Hz, quindi molto basso per il quale è possibile avere fenomeni di *sampling lack* (cioè scarsa

- densità di informazione per una adeguata ricostruzione del fenomeno indagato) (Fig. 5.15, descritta in maniera più dettagliata nel seguito);
- c) denti di tipo elicoidale che presentano, perciò, un ingranamento molto più “dolce” rispetto ai denti “diritti”;
 - d) rapporto tra denti pignone e ruota condotta (rocchetto) pari a $11/43$, pertanto lo stesso ingranamento avviene ogni 172 giri del pignone (Fig. 5.14, descritta in maniera più dettagliata nel seguito); da essa abbiamo la conferma che l’ingranamento con la stessa sequenza di accoppiamenti dei denti (pignone/rocchetto) avviene ogni 172 giri della ruota condotta.
 - e) assenza del segnale tachimetrico, che avrebbe consentito di estrarre giri interi del pignone;
 - f) lieve grado di irregolarità del motore che comunque contribuisce a rendere molto più difficoltosa l’estrazione di un giro completo del pignone.

Ciò premesso, si è reso, pertanto, necessario ricorrere alla Trasformata Wavelet. Infatti, con l’impiego di un calibrato filtro Wavelet, tarato sulla frequenza di *meshing* (pignone-ruota condotta), è stato possibile estrarre la sequenza vibrazionale generata dall’ingranamento dei denti in presa. L’estrazione dei coefficienti Wavelet, in opportuna scala, consente di valutare anche la morfologia e non soltanto la dinamica di ingranamento ottenendo da qui il neologismo da noi coniato di "morfodinamica" vibrazionale.

5.6 Monitoraggio cambio automobilistico – Risultati Run 11

Mediante l’utilizzo della Trasformata Wavelet è stato possibile, effettuare una diagnosi integrata su un gearbox. Siamo partiti dal Run 11 in quanto quelli precedenti sono stati considerati “Run di rodaggio”. Quindi il primo Run, per noi, significativo è stato appunto il Run 11. L’analisi, come si vedrà, si è estesa fino al Run 32 momento in cui si ha l’incipiente rottura del dente del cambio in esame.

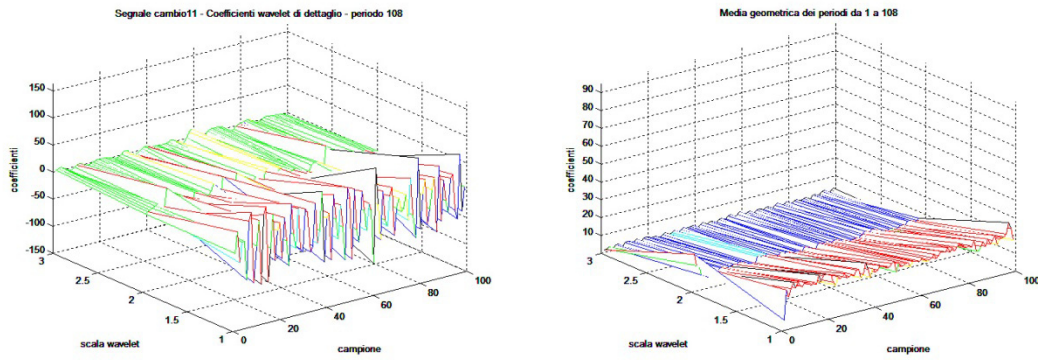


Fig. 5.3

La Fig. 5.3, ottenuta attraverso un algoritmo appositamente sviluppato ed implementato su piattaforma Matlab, mostra a sinistra, i coefficienti wavelet istantanei, estratti dal segnale accelerometrico originale composto da 99 punti. A destra è riportata la media geometrica progressiva dei coefficienti wavelet mediati su 108 pseudo-periodi. Il grafico di sinistra mostra una sequenza istantanea nella quale non sono rilevabili particolari anomalie. Bisogna, però, fare attenzione perché i 99 punti potrebbero essere anche 98 a causa dell'irregolarità del motore. Inoltre, siamo obbligati a decidere per l'uno o per l'altro valore (98 o 99) in quanto la piattaforma Matlab consente l'impiego di indici interi se riferiti a matrici e/o vettori. Tale problema assume un ruolo critico allorquando lo studio viene condotto su una sequenza temporale che abbraccia un numero cospicuo di periodi. Infatti, in tal caso, la differenza fra il valore di 98 o 99 punti/periodo può significativamente incidere sulla perdita o meno di frazioni intere o non di periodo.

Il diagramma di destra invece, come detto, rappresenta la media geometrica progressiva di questi periodi. La media geometrica progressiva, definita come segue:

$$\bar{x}_g = \left[\prod_{i=1}^n x_j(i) \right]^{\frac{1}{n}}, \quad j = 1, \dots, N \quad (4.1)$$

si comporta a tutti gli effetti come un filtro naturale.

La sua peculiarità è quella di annullare le irregolarità puramente *random* e di esaltare invece quelle che si ripetono sistematicamente.

L'analisi a mezzo Trasformata Wavelet illustrata in Fig. 5.3 non evidenzia anomalie incipienti.

La Wavelet selezionata appartiene alla famiglia Daubechies (Db5) (Fig. 5.4).

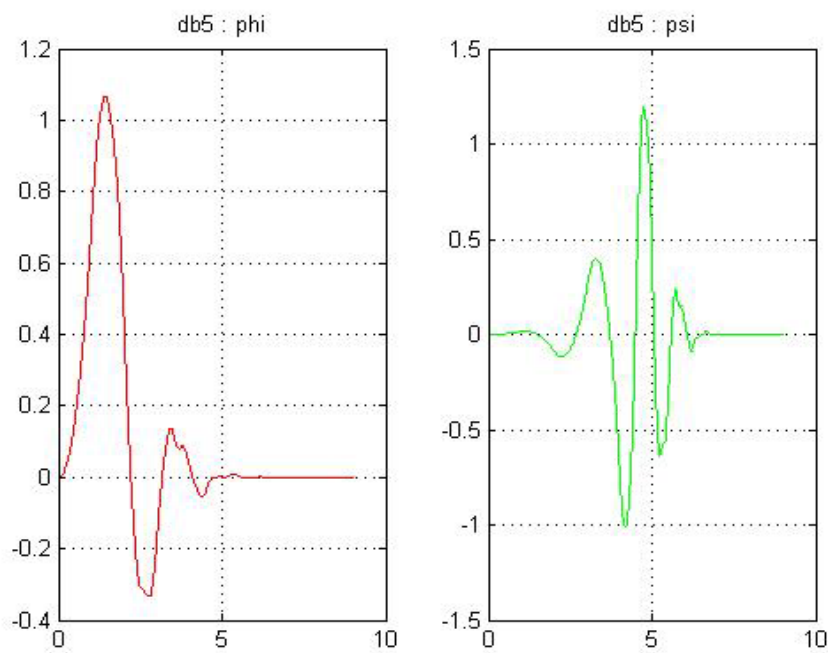


Fig. 5.4

Ai fini della diagnosi la Wavelet prescelta è quella che meglio permette di evidenziare l'esistenza sia della frequenza (la frequenza di *meshing* di ingranamento che è pari a circa 458Hz) e sia della forma (morfologia).

Osserviamo che l'analisi a mezzo Trasformata Wavelet consente di estrarre dal tracciato accelerometrico originario le sequenze corrispondenti alla frequenza di ingranamento. Per ottenere quest'ultima si sono moltiplicati gli 11 denti del pignone per 2500rpm e si è diviso il tutto per 60, per cui:

$$\text{frequenza media di meshing/ingranamento} = \frac{11 \times 2500}{60} \approx 458.33 \text{ Hz.}$$

Il valore di 458.33Hz rappresenta la frequenza centrale che dovrà avere la wavelet per effettuare le indagini sul segnale accelerometrico originale. Quando effettuiamo la convoluzione tra il segnale originale e la wavelet, cioè sui 99 punti, questa frequenza che abbiamo definito estrarrà, se il segnale originale contiene tale frequenza, gli 11 *spike* che evidenziano, da un punto di vista puramente meccanico, l'ingranamento degli 11 denti del pignone con i corrispondenti denti della ruota condotta.

I 99 punti rappresentano in effetti, con le avvertenze anzidette, un giro completo della ruota (pignone). Essendo la ruota composta di 11 denti, ci aspettiamo di ritrovare 11 picchi con la predetta frequenza. Non sempre è stato possibile visualizzare attraverso l'analisi delle sequenze di 99 punti gli 11 denti: ciò è dovuto al fenomeno del *Sampling Lack* (Fig. 5.15). In altri casi, l'analisi non evidenzia tutti gli 11 ingranamenti in quanto il giro non è stato esattamente costituito da 99 punti. Questo evidenzia ancora una volta la difficoltà riscontrata nel mettere a punto una metodologia affidabile.

Il diagramma successivo (Fig. 5.5) riporta il *waterfall* relativo al Run 32. In esso è presente la frequenza di meshing pari a 458.33Hz, ossia la frequenza base. Meglio però si esaltano la 2^a ottava (circa 917HZ) e la 3^a ottava (1375Hz).

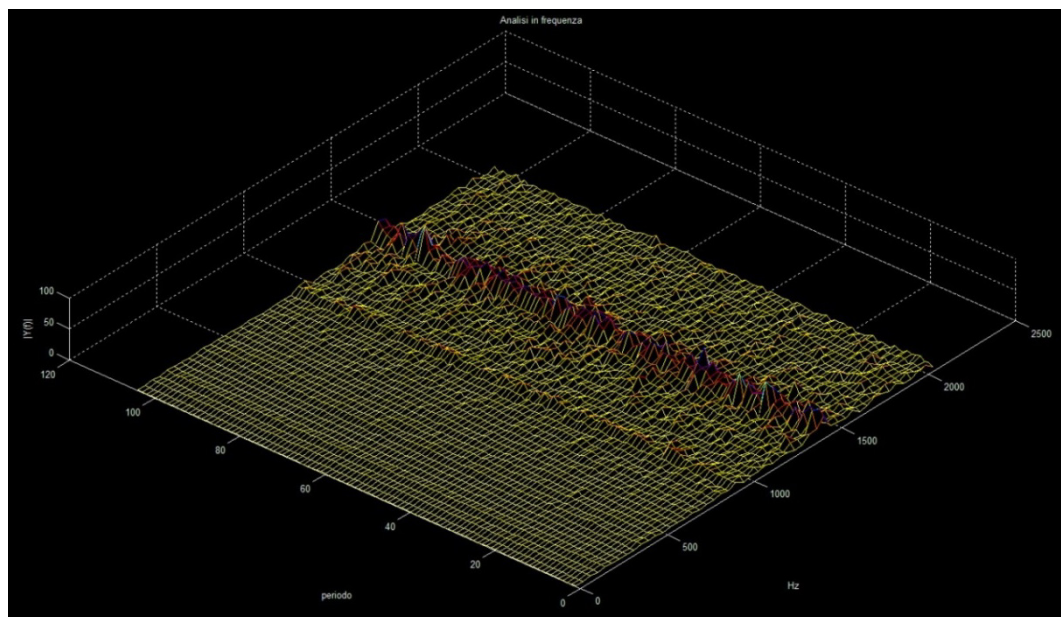


Fig. 5.5

Nel waterfall di Fig. 5.5, la prima ottava, cioè quella corrispondente a 458.33Hz è poco esaltata rispetto alle altre frequenze. Si osserva che tale waterfall è stato ricavato sui pseudo-periodi riferiti al Run 32, cioè proprio il Run nel quale si è verificata la rottura quasi istantanea del cambio. Ciò nonostante non sono ravvisabili particolari frequenze indicatrici di danneggiamenti al sistema tali da imporre un fermo prova. Si ha quindi l'esigenza di ricorrere a metodologie alternative, in quanto da esso non è possibile ricavare alcuna informazione relativa al danno incipiente.

5.7 Monitoraggio cambio automobilistico – Risultati Run 20

Il monitoraggio, dopo il Run 11, prosegue con l'analisi del Run 20 in quanto, nei precedenti Run non si è verificata nessuna significativa irregolarità di funzionamento. Anche per esso è stata eseguita la scomposizione dei pseudo-periodi impiegando la Db5, e successivamente la media geometrica progressiva.

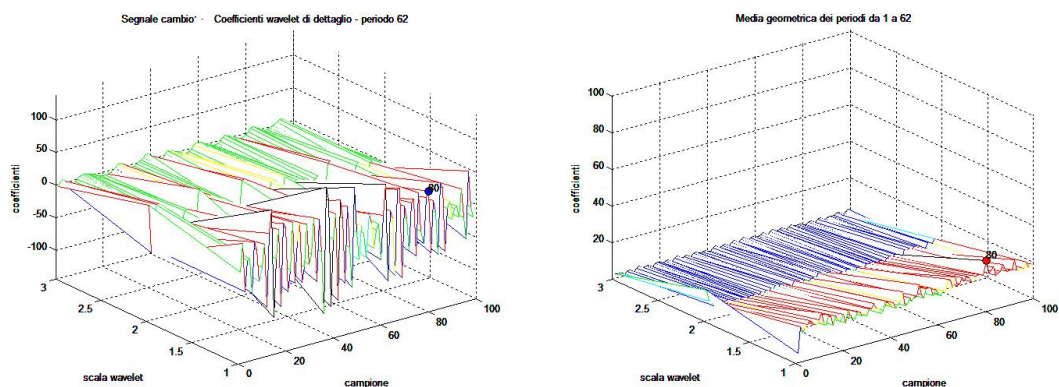


Fig. 5.6

I grafici di Fig. 5.6 e di Fig. 5.7 sono composti, ancora una volta, da due finestre, quella di sinistra relativa ai coefficienti Wavelet istantanei in cui si osserva, a partire da un certo istante in poi, la presenza di uno spike che dinamicamente assume valori negativi e positivi (evidenziato in blu nell'immagine di sinistra). A destra tale spike tende ad occupare una posizione ben definita (evidenziata in rosso) nell'ambito del pseudo-periodo, evidenziando in tal modo la presenza di una significativa irregolarità di tipo dinamico rilevata

dal segnale accelerometrico e ben messa in evidenza attraverso l'impiego della Wavelet. Tali indicazioni sono sintomatiche di un funzionamento non regolare del sistema.

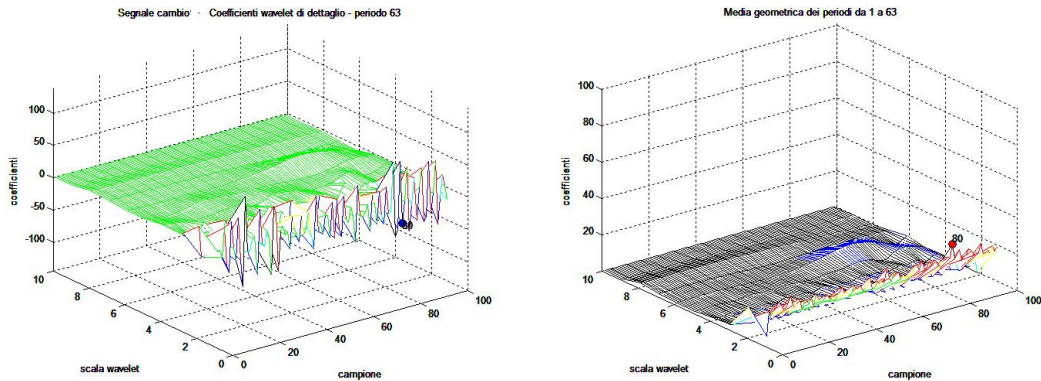


Fig. 5.7

5.8 Grado d'irregolarità

Più volte si è detto che il motore elettrico che aziona il cambio non “gira” con regolarità bensì presenta un certo grado d'irregolarità il che rende i 99 punti del pseudo-periodo non una quantità stabile, nel senso che potrebbero anche essere 98 i punti da ritenere validi durante un giro completo del pignone o valori minori di 98 ovvero maggiori di 99.

Esemplifichiamo quanto sopra ricorrendo alla determinazione del grado di irregolarità per due diversi Run: il 15 ed il 32.

Nella Fig. 5.8 è riportato, a mo' di esempio, un segnale accelerometrico relativo al Run 15.

Si osserva che, salvo diverse indicazioni nei diagrammi successivi il tempo è stato adimensionalizzato: infatti esso è espresso in u.d.t. (unità di tempo), ossia il numero di punti del segnale. Naturalmente nota la frequenza di campionamento è possibile ricavare i secondi equivalenti. Questo in quanto i punti relativi alla sequenza accelerometrica rappresentano una serie temporale discreta.

Dall'osservazione del diagramma di cui sopra possiamo verificare, anche, la funzionalità dello stesso accelerometro. Infatti il segnale è mediamente centrato intorno al 0m/s^2 .

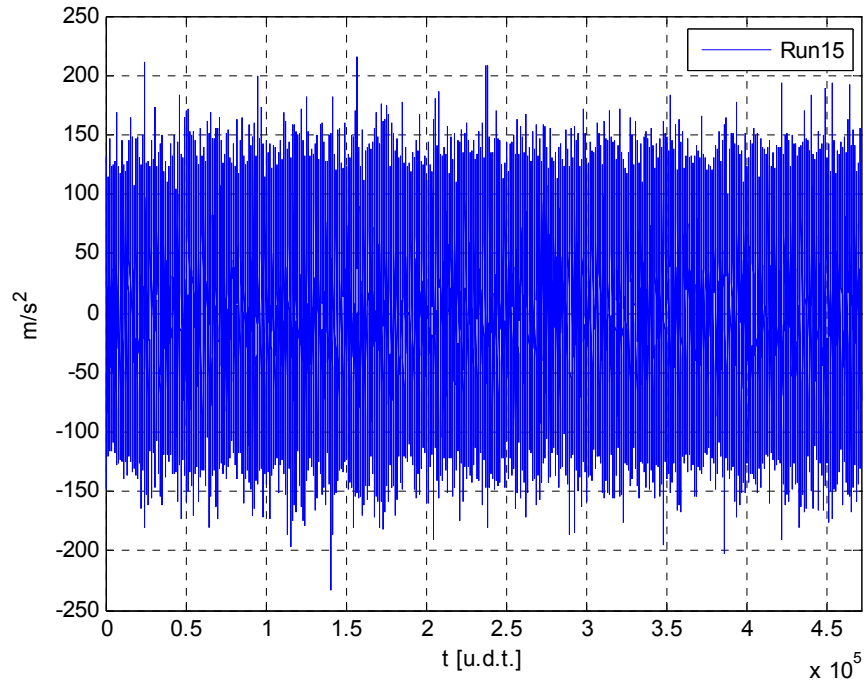


Fig. 5.8

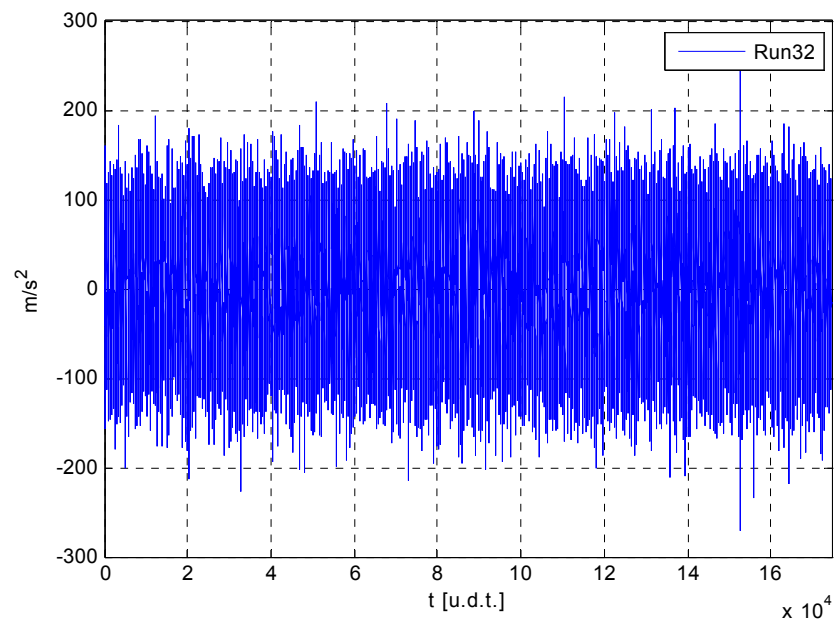


Fig. 5.9

L'altro segnale accelerometrico che abbiamo considerato è quello relativo, come detto, al Run 32 (Fig. 5.9), cioè la sequenza accelerometrica in cui si è verificata la rottura del cambio.

Dal confronto dei due segnali non si osserva niente di particolare.

I due segnali riportati nelle due immagini precedenti sono stati opportunamente “tagliati” in quanto abbiamo eliminato dall’analisi quella parte del segnale che si riferisce alla “rampa” di accelerazione perché non rientrante tra gli obiettivi della presente ricerca scientifica. Per completezza si riporta, ad esempio l’intero segnale relativo al numero di giri del Run 15 comprensivo di rampa di accelerazione (Fig. 5.10).

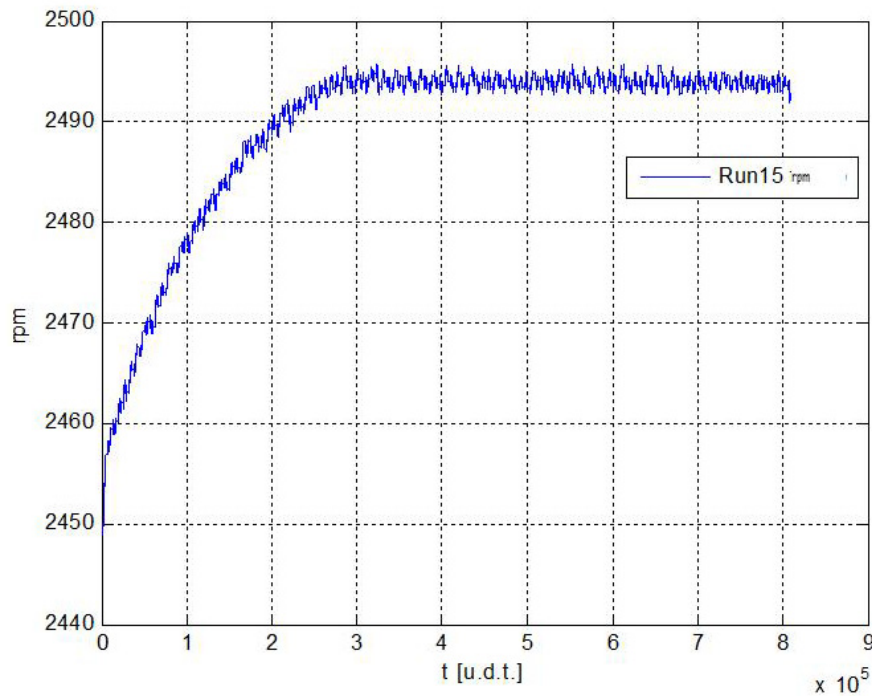


Fig. 5.10

Nella Fig. 5.11 riportiamo un dettaglio del suddetto segnale a regime al fine di meglio mostrare il grado di irregolarità simulato artificialmente attraverso un apposito sistema elettronico.

A completamento, riportiamo di seguito la determinazione del grado di irregolarità del Run 15 e del Run 32 rispettivamente:

$$\delta_{RUN15} = \frac{n_{max} - n_{min}}{n_{medio}} = 0.0013$$

$$\delta_{RUN32} = \frac{n_{max} - n_{min}}{n_{medio}} = 0.0011.$$

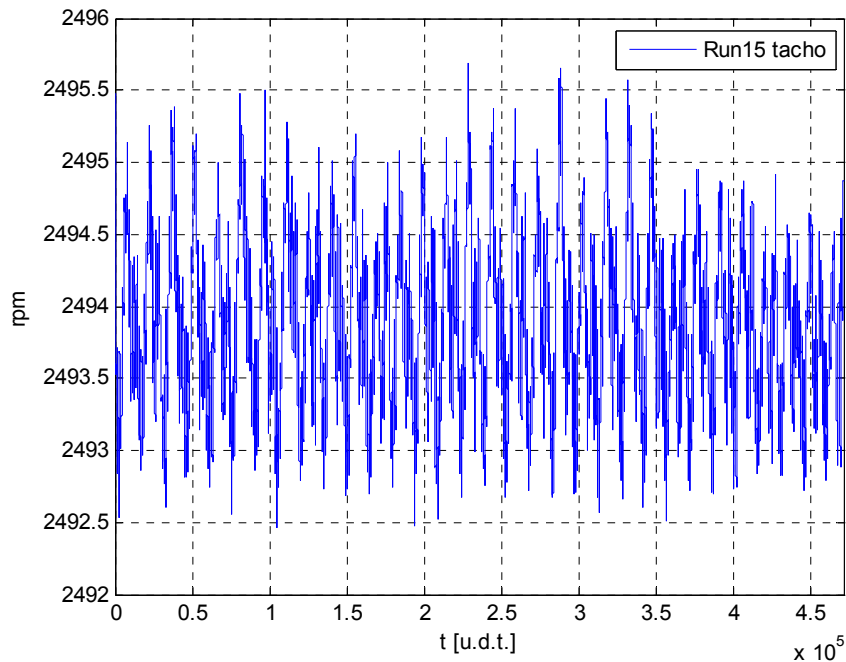


Fig. 5.11

Quanto sopra, per ribadire che in mancanza del segnale tachimetrico uno dei principali problemi che abbiamo dovuto risolvere è stato quello rappresentato proprio dalla presenza della irregolarità volutamente indotta artificialmente.

Tale irregolarità, come detto, produce nel tempo significative variazioni nel conteggio dei punti equivalenti (98/99) al numero di giri reali compiuti dal pignone.

A tal punto vogliamo sottolineare che un'analisi limitata solo allo studio degli spettri di frequenza (Fig. 5.12 e Fig. 5.13), in particolare mirando alla rilevazione di sottobande prossime alla frequenza di meshing o a quella delle ottave superiori, difficilmente evidenzia la presenza di sottobande significative. Ciò in quanto esse in genere sono “coperte” dal noise. Inoltre, il danno (in questo caso *pitting*) è talmente *soft* che difficilmente è capace di generare frequenze proprie, ovvero il danno procede, dopo una iniziale comparsa, con estrema rapidità tale da portare a rottura improvvisa il riduttore.

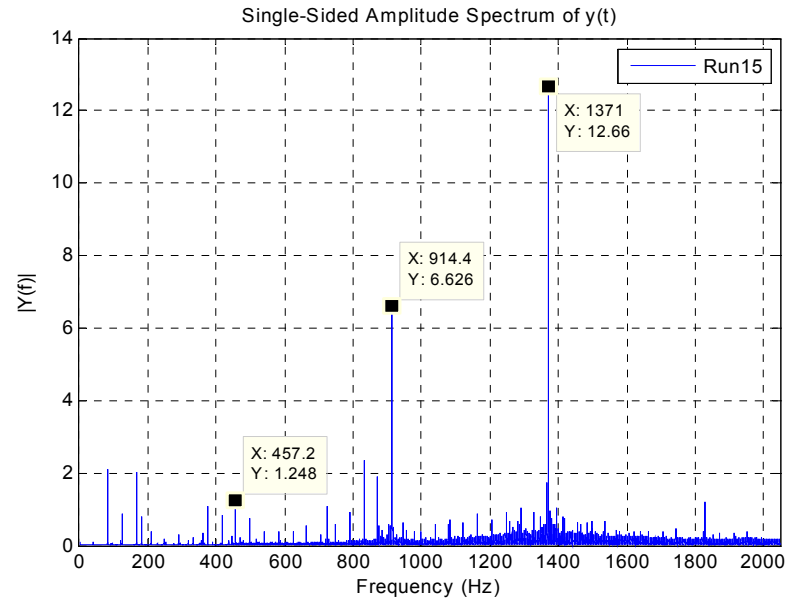


Fig. 5.12

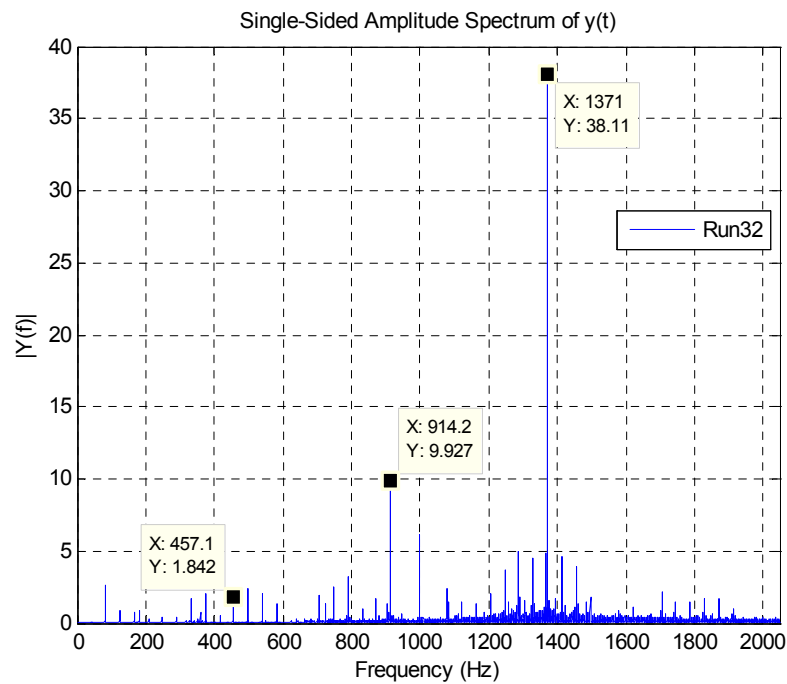


Fig. 5.13

5.9 Diagramma ω vs K_ω – Risultati

L'analisi relativa alla metodica tendente alla determinazione della dinamica evolutiva di una serie temporale che bene si integra con la ricerca di λ , massimo esponente di Lyapunov, consente di ottenere il cosiddetto diagramma ω vs K_ω

(Fig. 5.14). Dall'osservazione di questo diagramma è possibile individuare il miglior ingranamento tra pignone e condotta.

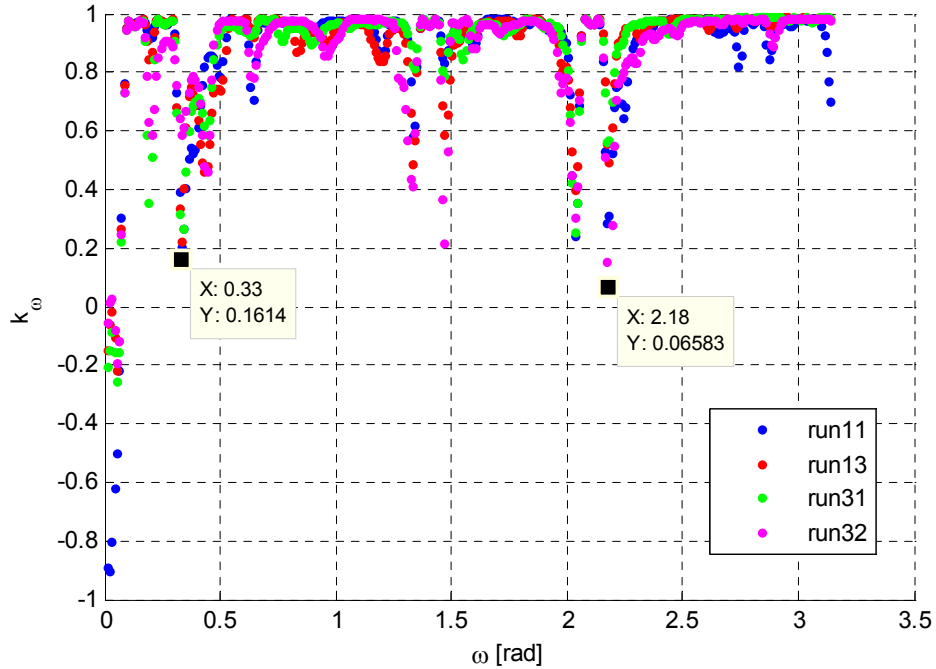


Fig. 5.14

Il suddetto grafico è estremamente importante. Ricordiamo che sugli assi sono riportati i radianti, in ascissa, mentre in ordinata è riportato K_ω dato dalla seguente relazione (cfr. Cap. 3):

$$K_\omega = \rho(\xi, \Delta) = \frac{\text{cov}(\xi, \Delta)}{\sqrt{\text{var}(\xi)\text{var}(\Delta)}}$$

con K_ω numero adimensionale.

Ancora, ricordiamo che se K_ω tende a zero allora la serie temporale che stiamo studiando è di tipo pseudo-stazionario. Viceversa la tendenza di K_ω verso l'unità, cosa che accade per la maggior parte delle frequenze osservate, induce a ritenere che in quegli istanti il sistema esibisce dinamiche pseudo-caotiche. La conseguenza meccanica che possiamo trarre, osservando il diagramma in oggetto, è che il continuo variare dei denti ingrananti, determinato dal rapporto

incommensurabile costituito dal numero dei denti del pignone (11) e dal numero dei denti della ruota condotta (43), induce nella dinamica vibrazionale continue variazioni del modo di vibrare. In particolare è possibile notare almeno due istanti in cui l'ingranamento tra i denti è quanto mai ottimale. Se rapportiamo il fenomeno da una base temporale ad una base cinematica ci accorgiamo che l'intervallo temporale in oggetto è quello che separa il tempo intercorrente alle due ruote per venire in contatto con la medesima sequenza di ingranamento osservata in precedenza. Tutto ciò equivale a dire che, tenendo presente il numero di giri, il numero di denti del pignone ed il numero di denti della ruota condotta, tale evento si ripeterà, di fatto, ogni 172 giri reali del pignone. Nel diagramma di cui sopra abbiamo confrontato le sequenze relative ai Run 11, 12, 31 e 32. Nell'ambito delle proprie evoluzioni si nota che in effetti esse sono molto simili e ripetitive.

Questo accade per tutti gli ingranaggi anche per quelli a denti dritti: c'è sempre un accoppiamento di ingranamento che è il migliore in assoluto.

In particolare, dall'osservazione di tale grafico si notano, prendendo come riferimento l'intervallo $(0, \pi)$, l'insorgere di due forti scostamenti da quello che poi risulta essere l'andamento tipico. In generale, l'andamento tende a stabilizzarsi intorno al valore 1; allo stesso tempo, però, si osserva che intorno a tale valore l'andamento è molto frastagliato, indice di molto rumore di fondo. Il diagramma, come detto, presenta due forti scostamenti che si possono considerare come due minimi, il primo in corrispondenza di $\omega_1 = 0.33$ radianti ed il secondo in corrispondenza di $\omega_2 = 2.18$ radianti. Questi due valori ci permettono di capire che in tale intervallo $(0, \pi)$ vi sono solo due perfetti ingranamenti tra pignone e rocchetto, in tutti gli altri casi non essendoci perfetto ingranamento ciò causa sequenze accelerometriche affette da "noise".

Affrontiamo adesso il discorso in maniera quantitativa: è noto che il numero di giri teorico del pignone è pari a 2500 giri/min, il numero dei denti del pignone è uguale a 11 mentre il numero dei denti del rocchetto (condotta) è 43. La frequenza di campionamento, *Sampling rate*, è 4096 punti/s, pertanto, volendo calcolare i giri al secondo, basterà dividere 2500 per 60, quindi

$$n = \frac{2500}{60} = 41.67 \frac{\text{giri}}{\text{s}}$$

Da cui è possibile ottenere la durata di 1 giro del pignone e il numero di punti a giro

$$T_p = \frac{1}{41.67} = 0.024 \frac{\text{s}}{\text{giro}}, \quad P_g = 4096 \times 0.024 = 98.304 \frac{\text{punti}}{\text{giro}}$$

In realtà, il numero di giri medio al minuto del pignone è 2495, pertanto si avrà un numero di giri al secondo pari a circa

$$n = \frac{2495}{60} = 41.583 \frac{\text{giri}}{\text{s}}$$

Allora si avrà

$$T_p = \frac{1}{41.583} = 0.0241 \frac{\text{s}}{\text{giro}} \quad \text{e} \quad P_g = 4096 \times 0.0241 = 98.71 \frac{\text{punti}}{\text{giro}}$$

Quindi il range, per quanto riguarda i punti al giro del pignone, sarà

$$\text{range} = 98.304 \div 98.710 \approx 99 \frac{\text{punti}}{\text{giro}}$$

Avendo il pignone 11 denti e il rocchetto 43, si osserva che, solo dopo 4 giri del pignone il rocchetto impegna nuovamente il suo primo dente. Quindi

$$4 \text{ giri pignone} \times 43 \text{ denti} = 172 \text{ giri condotta}.$$

Se moltiplichiamo 172 per 98.304 e per 98.710 otteniamo rispettivamente, nel primo caso, 16908 punti mentre nel secondo 16978 punti, quindi abbiamo uno scostamento di circa 70 punti.

La lunghezza della serie considerata, a cui si riferisce il diagramma χ vs ζ , è pari a 980 punti e quindi impostando la seguente proporzione:

$$980 : \pi = \chi : 0.33$$

dove 0.33, sono i radianti in cui si verifica il primo minimo di K_{ω} , poiché π rappresenta la base angolare equivalente alla base temporale del segnale, otteniamo

$$\chi = \frac{980 \times 0.33}{\pi} = 102.94.$$

Questo valore è evidentemente molto vicino al valore 99 calcolato in precedenza, il quale esprimeva il numero di punti relativi ad un giro del pignone. Ciò ci fa capire, quindi, che il primo minimo nel diagramma si ha in corrispondenza del primo giro del pignone. Prendiamo tale istante come punto di riferimento per il migliore ingranamento esibito dal contatto fra i denti. (Ricordiamo che dopo ogni giro completo del pignone si *shifta* un dente della ruota condotta).

Impostiamo adesso la proporzione anche per il secondo minimo visibile corrispondente questa volta a 2.18 radianti:

$$980 : \pi = \chi : 2.18$$

da cui

$$\chi = \frac{980 \times 2.18}{\pi} = 680.04$$

Poiché si è visto che l'ingranamento tra pignone e rocchetto si ripete ogni 4 giri del pignone, pertanto, si ha allora:

$$\frac{680.04}{4} = 170.01 \text{ giri della ruota condotta}$$

Teoricamente si è visto che i giri della ruota condotta erano 172, tuttavia i due valori calcolati, 170.01 e 172, sono molto prossimi. La leggera discrepanza può essere giustificata dal fatto che, come più volte ricordato, il numero di giri reale non è pari a 2500, ed inoltre esso è variabile. Con riferimento all'ultima osservazione si cita ancora una volta il grado di irregolarità di cui se ne è già parlato e di cui ne ricordiamo l'espressione:

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{medio}}$$

Esso è utile per tener conto dell'oscillazione ammessa per la velocità angolare dell'utilizzatore. Il grado d'irregolarità nel periodo si definisce come il rapporto tra la massima oscillazione della velocità angolare e la velocità angolare media.

La suddetta metodologia per l'individuazione dell'incipiente danno ad un dente dell'ingranaggio in studio potrebbe essere ottimizzata ad un punto tale da poterla impiegare in *real time*. In tal caso fissato un opportuno *threshold* potremmo segnalare in tempo la presenza di significative anomalie allorquando il valore di K_{ω} dovesse superare la predetta soglia di preallarme. Scopo della presente ricerca però è stato anche quello di integrare metodiche sofisticate, recenti e soprattutto molto sensibili ad individuare la presenza di irregolarità vibrazionali anche laddove la dinamica si presenta estremamente a basso livello di energia (ovvero entropia).

Prima di concludere il paragrafo riportiamo il grafico che mostra il più volte citato fenomeno del *Sampling Lack*.

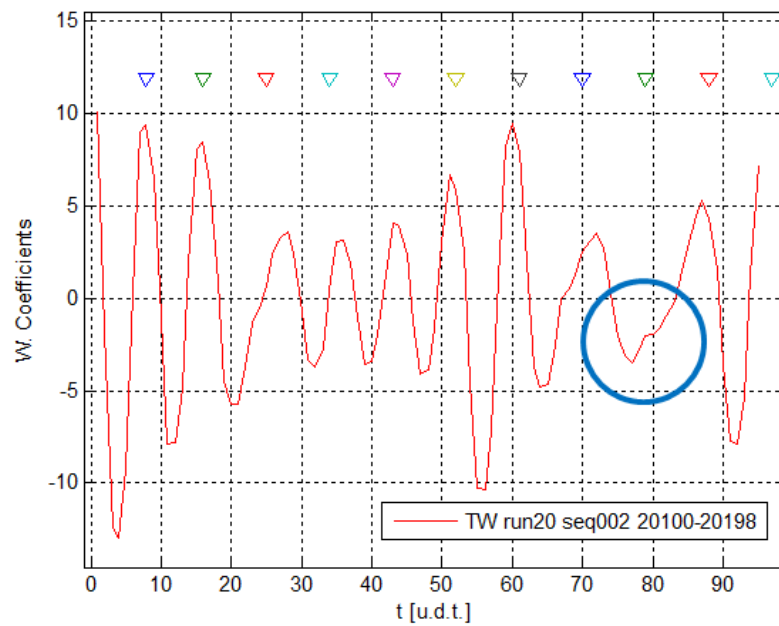


Fig. 5.15

In Fig. 5.15, non è visibile lo sforzo pulsante di un dente (cerchiato). In realtà, esso non è visibile poiché la sequenza originale è stata successivamente sotto campionata: manca il dato sul segnale originale (*lower sampling*). Si precisa inoltre che la sequenza è ottenuta con la Wavelet appartenente alla famiglia della Db5 in scala 3 con frequenza di centro banda pari a 910.2222Hz e campionamento a 4096Hz. La figura mostra mediamente 10-11 picchi equidistanziati (se rapportati alla scelta che dobbiamo operare tra 98 e 99 punti a giro). Tale fenomeno si può attribuire al fatto che il campionamento avvenuto a 40kHz è stato successivamente ridotto, per ragioni di studio, a 4096Hz.

Nonostante ciò, l'andamento dei coefficienti Wavelet ci permette di osservare la morfologia vibratoria del segnale dalla quale si evince, chiaramente, la presenza di due contraccolpi significativi dovuto allo sforzo pulsante che si sviluppa durante l'ingranamento dei denti elicoidali, ma anche la non uniformità della distribuzione dei carichi sui fianchi relativi agli 11 denti del pignone.

5.10 Lyapunov e Kurtosis – Risultati

L'analisi wavelet è strettamente correlata alla Teoria del Caos, infatti l'utilizzo di entrambe le teorie ha permesso di mettere a punto, come detto, un

algoritmo il cui risultato permette di interrompere la prova anticipatamente consentendo un'ispezione più significativa all'interno della scatola cambio.

Nella trattazione che segue, come misura che quantizza la caoticità di un attrattore sono stati utilizzati gli esponenti di Lyapunov relativi alle traiettorie infinitamente vicine che partono da un istante qualsiasi x fino all'istante y . Tale parametro, consente di stabilire l'evoluzione media di traiettorie comunque vicine.

La ricerca dell'esponente massimo di Lyapunov è stata effettuata per 13 Run ed in particolare per sequenze di 5000 punti presi in tre intervalli di tempo diversi, all'inizio del segnale, nella parte centrale del segnale e nella parte finale del segnale. Riportiamo nella Tab. 5.2 i risultati ottenuti.

RUN	λ parte iniziale segnale	λ parte centrale segnale	λ parte finale segnale
RUN 11	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
RUN 13	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
RUN 15	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
RUN 16	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
RUN 17	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
RUN 18	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
RUN 19	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
RUN 20	$-\infty$	$-\infty$	$5.9751e^{-006}$
RUN 25	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
RUN 28	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
RUN 30	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
RUN 31	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
RUN 32	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

Tab. 5.2 - Valori λ_{\max} di Lyapunov per sequenze di 5000 punti

La tabella mostra come i valori λ di Lyapunov tendano tutti $-\infty$, quindi il problema macroscopicamente è stabile, tranne che in un caso dove c'è un piccolo allarme, ossia nella parte finale del segnale Run 20. Pertanto focalizziamo l'attenzione su tale Run ed andiamo ad osservarlo più nel dettaglio.

A tal fine abbiamo utilizzato un parametro statistico chiamato *Kurtosis* (v. Appendice C). Questo parametro ci consente di individuare la presenza di sequenze di *spike* (picchi) laddove il predetto parametro dovesse assumere valori prossimi o superiori a 3. Questo fenomeno, quindi, lo possiamo notare sia con Lyapunov che con l'utilizzo di quest'ultimo parametro. Infatti, tranne il Run 32

dove avviene la rottura del cambio, osserviamo che solamente il Run 20 mostra una curtosi significativamente superiore a 3, (Tab. 5.3).

Le due informazioni ricavate da metodiche diverse tra loro, quindi coincidono.

<i>Kurtosis</i> (run 13)	<i>Kurtosis</i> (run 17)	<i>Kurtosis</i> (run 20)	<i>Kurtosis</i> (run 31)	<i>Kurtosis</i> (run 32)
2.9657	2.2163	7.2827	2.5127	5.2753

Tab. 5.3

Il diagramma che segue (Fig. 5.16) riporta la Kurtosis sempre in scala 6 opportunamente selezionata per garantire la selezione della frequenza di meshing pari a circa 458Hz. Tali dati rappresentano le medie geometriche progressive del parametro Kurtosis calcolato sui coefficienti wavelet estratti mediante la Db5.

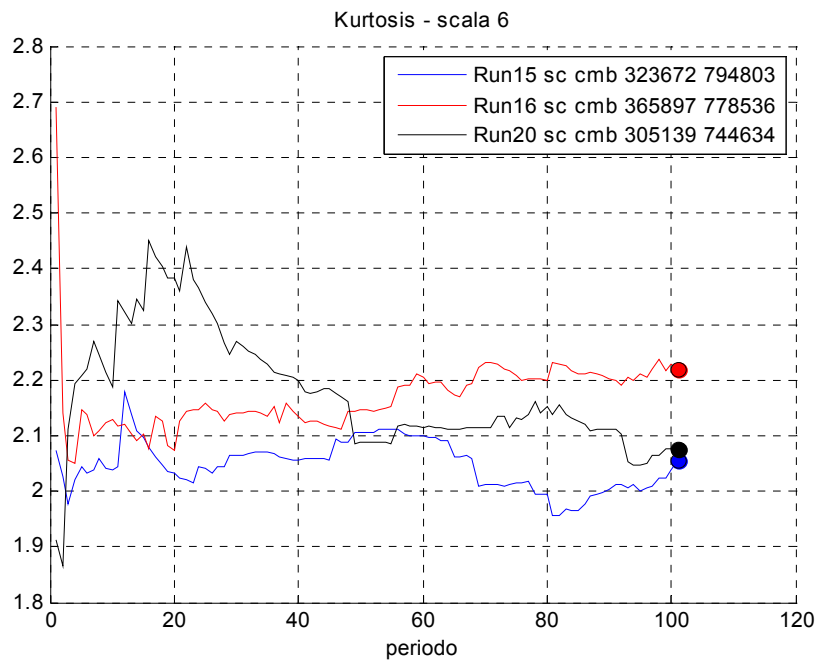


Fig. 5.16

Dal confronto dei suddetti Run notiamo subito la presenza di una significativa zona al di sopra del valore 2.2, in particolare proprio per il Run 20. Tale situazione costituisce certamente un segnale d'allarme, in quanto il predetto andamento non è imputabile a fattori accidentali, bensì, data la significativa

quantità di periodi coinvolti, ad una situazione di incipiente irregolarità causata, molto probabilmente, dalla presenza di un primo fenomeno di *pitting*, in particolare *micropitting*.

Il diagramma successivo, Fig. 5.17, mette a confronto gli stessi Run, appena considerati, però questa volta considerando il quarto momento della funzione densità (v. Appendice C) che permette di eliminare alcune punte e consente di verificare che quello evidenziato nella figura precedente non era un fatto accidentale. È ancora più evidente che il Run 20 prevale su gli altri Run considerati.

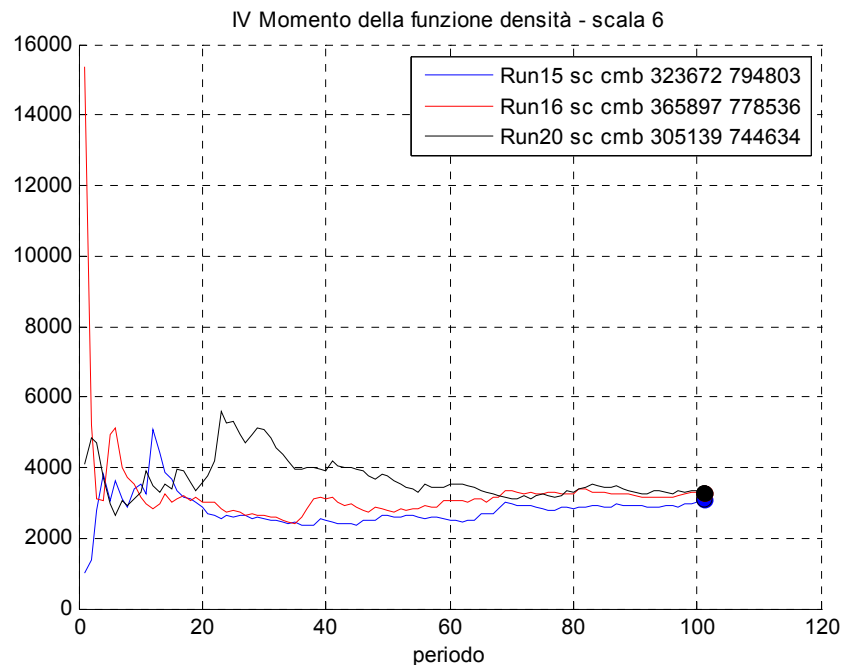


Fig. 5.17

Il Run 20 risulta sempre il più alto, in termini di Kurtosis, anche se lo mettiamo confronto con i Run 17, 18 e 19 (Fig. 5.18).

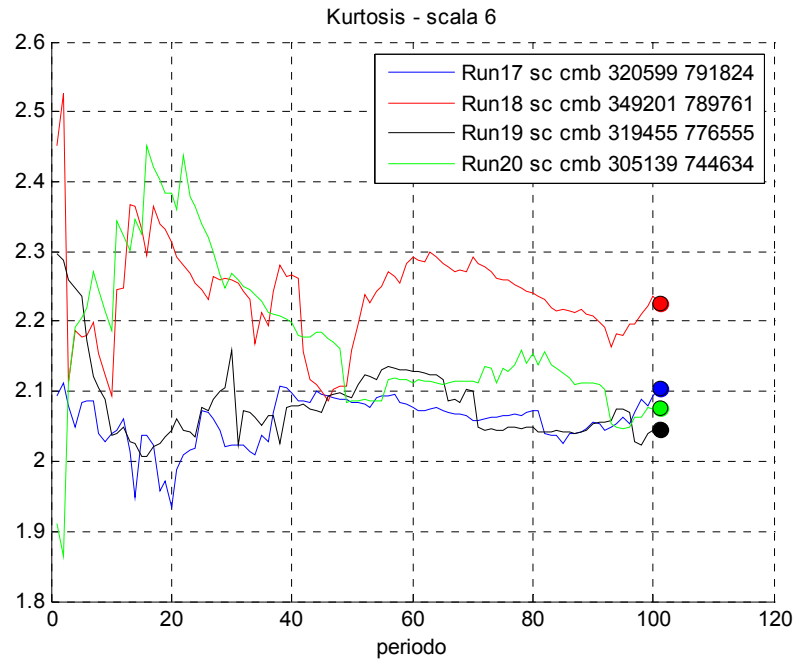


Fig. 5.18

Stessa cosa accade se mettiamo a confronto il Run 20 con il Run 25 ed il Run 28 (Fig. 5.19).

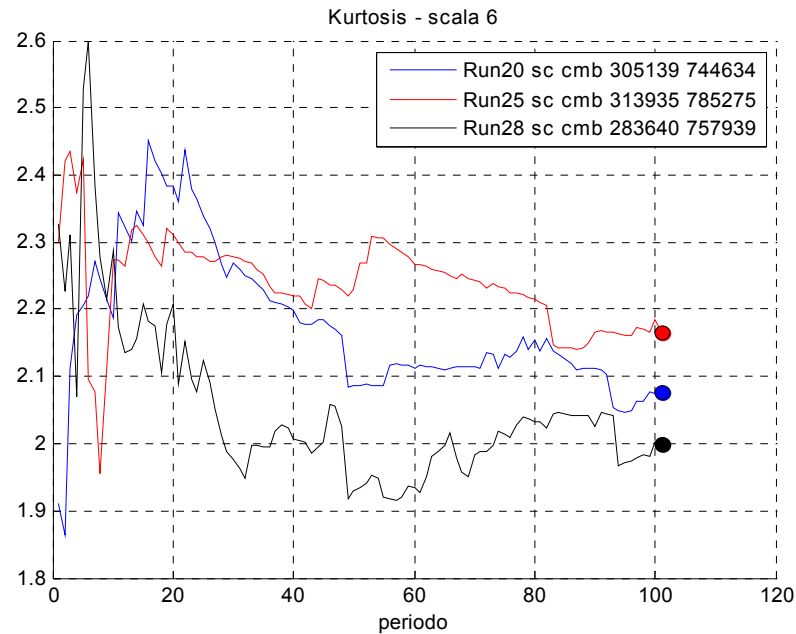


Fig. 5.19

Ancora, il Run 20 risulta essere sempre più alto in termini di Kurtosis del 30 e 31 (Fig. 5.20 e Fig. 5.21). Questo ci fa intuire che nel Run 20 è già presente una

forte anomalia che il λ_{max} di Lyapunov, parametro molto sensibile, aveva evidenziato. Il Run 32 ovviamente è l'unico ad essere più alto (in termini di Kurtosis) del Run 20 in quanto proprio al 32% della prova si è verificata la rottura del cambio automobilistico (Fig. 5.20 e Fig. 5.21).

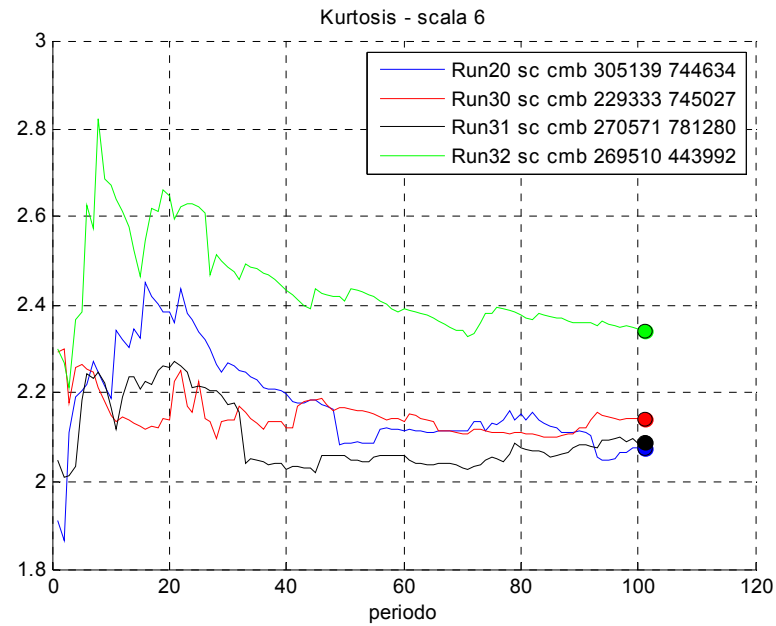


Fig. 5.20

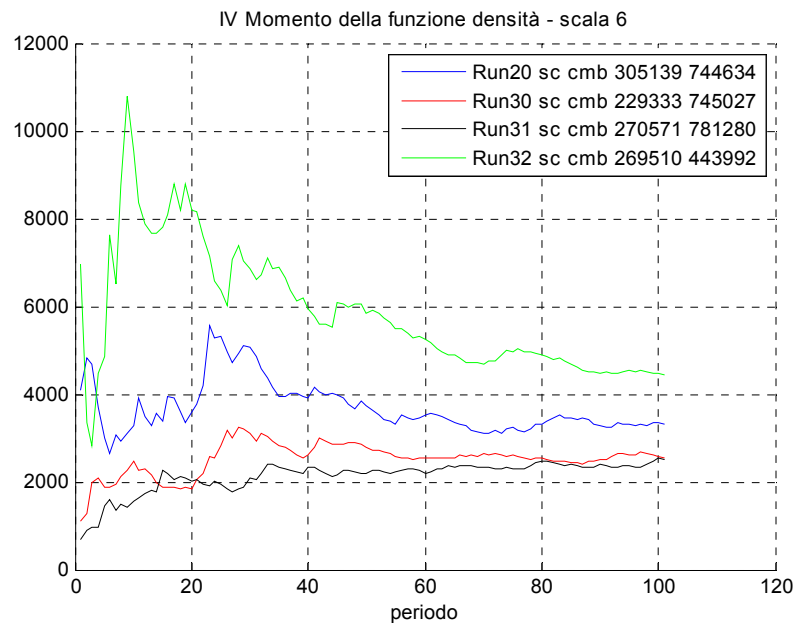


Fig. 5.21

5.11 Mappa di Poincaré – Risultati

In linea generale, si evidenzia che in ogni mappa di seguito riportata, si nota la presenza di due attrattori (riferibili alla presenza di due ottave ben distinte e individuabili nello spettro di Fourier e bene individuate dai coefficienti Wavelet, Db5, scala 6, ricavati dalle rispettive sequenze accelerometriche). La loro distanza tende a ridursi quando il complesso meccanico comincia a decadere.

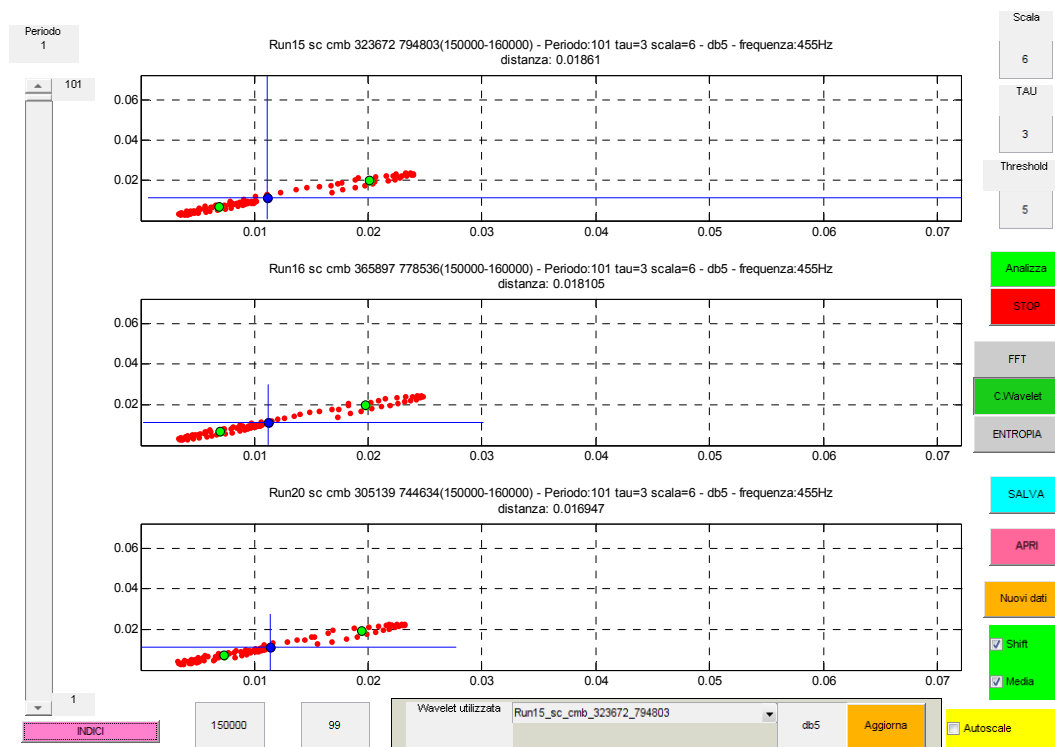


Fig. 5.22

L'insorgere di una anomalia determina inevitabilmente l'insorgere di sottobande in corrispondenza delle ottave principali (la 2^a e la 3^a). Tale fenomeno spiega perché la distanza fra i due centroidi, letta sul piano di Poincaré, tende a ridursi. Infatti l'insorgenza di una sottobanda, poiché “maschera” di fatto l'ottava di riferimento, comunque ne riduce il “peso” anche in termini energetici. Di conseguenza la distanza relativa ai centroidi tende a ridursi. Al limite se le ottave fossero completamente annullate dalla presenza di multipli di sottobande, la mappa o diventerebbe completamente caotica o diventerebbe perfettamente stazionaria e quindi in tal caso potremmo notare la presenza di un solo centroide.

Il grafico riportato in Fig. 5.22 è riferito al confronto dei Run 15, 16 e 20. le distanze (adimensionali) riferite a ciascun Run risultano essere le seguenti: 0.01861 Run 15, 0.18105 Run 16 e 0.16947 Run20.

Analogo ragionamento può essere condotto circa il confronto con altri Run. A titolo d'esempio riportiamo i risultati ottenuti confrontando il Run 20 con il 17, 18 e 19 (Fig. 5.23), ed ancora il Run 20 con il 25 e 28 (Fig. 5.24) ed infine il Run 20 con il 30, 31 e 32 (Fig. 5.25).

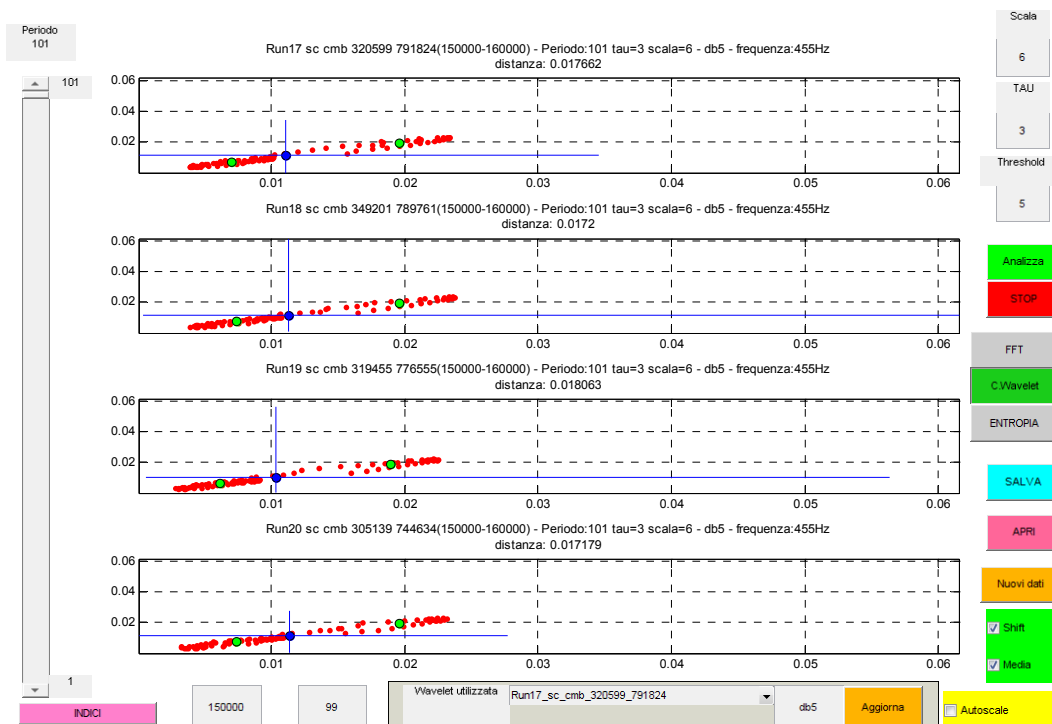


Fig. 5.23

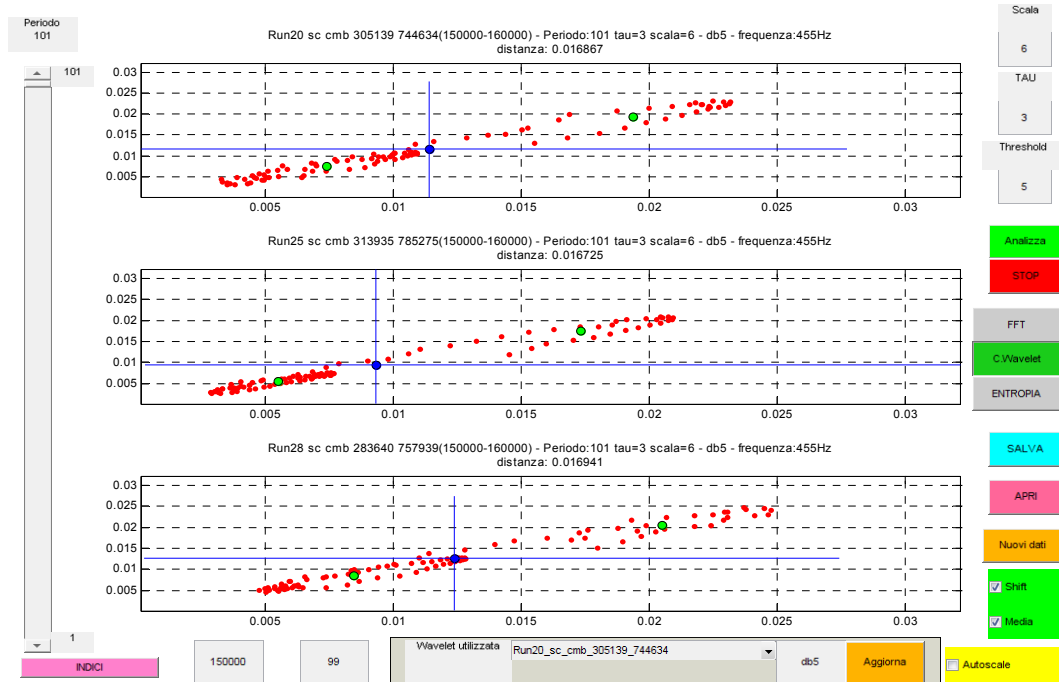


Fig. 5.24

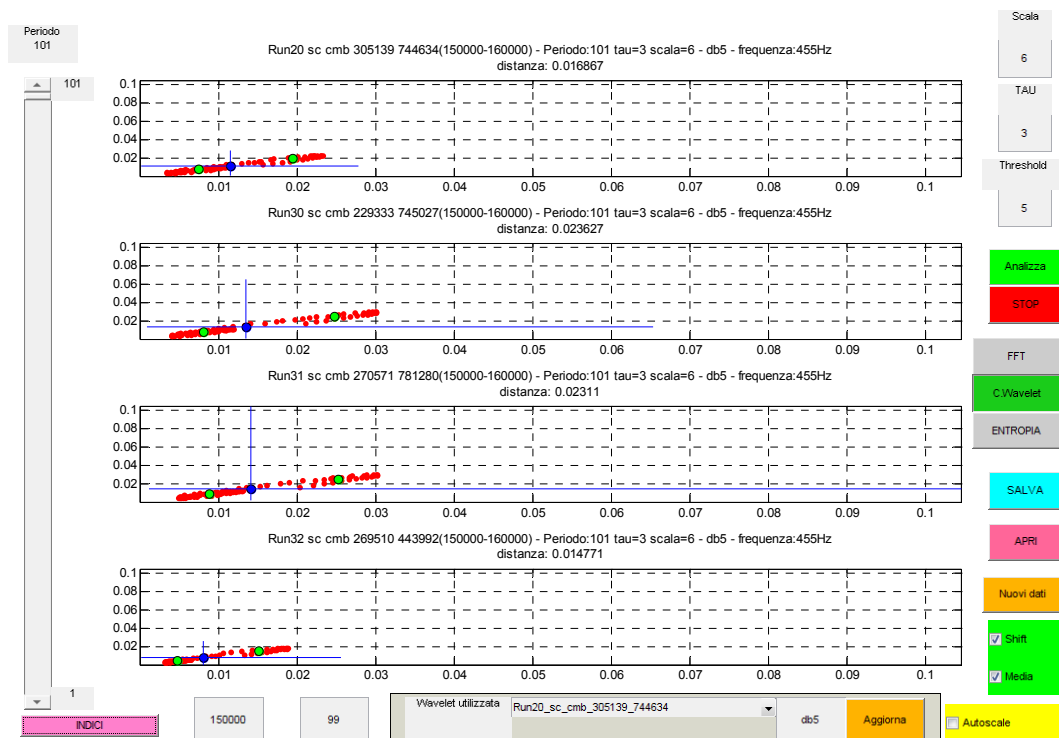


Fig. 5.25

Relativamente a quest'ultima mappa osserviamo che la distanza esibita dalle traiettorie del Run 20 è pari a 0.016867, mentre per il Run 30 vale 0.023627 e per

il Run 31 è pari a 0.02311. Soltanto il Run 32 esibisce una distanza tra i due centroidi pari a 0.014771.

Quest'ultima, come dovevamo aspettarci, è la distanza più piccola in assoluto, in quanto l'insorgere di *side bands* negli intorni delle ottave principali ne riducono, come detto, il peso relativo.

L'integrazione delle metodologie riportate, impone, come evidente, un fermo prova al Run 20, quindi con un significativo anticipo rispetto a quanto è possibile ottenere con le usuali tecniche di monitoraggio. Ciò comporta numerosi vantaggi in termini sia di costi inerenti le prove di affidabilità, sia in termini di riscontro danneggiamenti/usure agli organi costituenti il cambio e quindi poter risalire alle cause delle difettosità. Come già riportato, è evidente che una ispezione degli organi costituenti il cambio ha maggiore impatto se non si sono ancora verificate deformazioni plastiche o importanti usure. Una loro presenza, infatti, renderebbe estremamente difficoltoso risalire alle cause generatrici e di conseguenza alla sua riprogettazione e/o modifica di componenti del cambio stesso.

Infatti, l'integrazione delle suddette informazioni, sebbene derivate da metodiche tra loro diverse, consente di individuare l'istante in cui le derivazioni accelerometriche eseguite su un sistema di per sé molto complesso, ma soprattutto con le limitazioni di cui si è fatto ampio riferimento nei paragrafi precedenti, ha consentito di mettere a punto un algoritmo che, per velocità, sensibilità ed affidabilità, può essere impiegato *on-line* per il monitoraggio di test di durata di cambi automobilistici.

Capitolo 6

Diagnostica e monitoraggio vibrazionale di motori a c.i.

6.1 Introduzione

Il motore adoperato nelle prove è un motore 4 tempi 4 cilindri in linea, secondo la configurazione rappresentata nella Fig. 6.1, alimentato a gasolio, quindi, come è noto, per ciascun cilindro, l'intero ciclo termodinamico si compie in due giri (periodi) completi dell'albero motore. In un singolo periodo si ha la combustione, sfasata di circa 180° , in due cilindri secondo un predeterminato ordine di accensione, che, nel nostro caso, avviene secondo la sequenza 1 - 3 - 4 - 2.

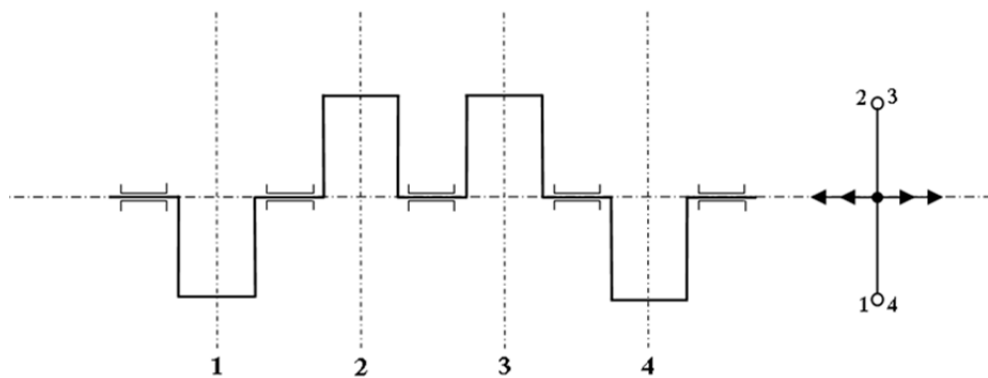


Fig. 6.1

Nel seguito si è indicato, convenzionalmente, con I la coppia di cilindri 1-3 e con II la coppia 4-2. In appresso faremo riferimento, salvo diversa indicazione, con la notazione I_1, I_2, \dots, I_n alla prima, alla seconda, all' n -esima detonazione della coppia di cilindri 1-3 e con II_1, II_2, \dots, II_n alla prima, alla seconda, all' n -esima detonazione relativa alla coppia di cilindri 4-2.

Ovviamente le dinamiche accelerometriche relative alle coppie di cilindri dispari (1-3) evolvono in 360° mentre nei successivi si realizzano le dinamiche

accelerometriche relative alla coppia di cilindri pari (4-2). Pertanto l'intero periodo termodinamico relativo a ciascun cilindro, si compie in 720° di manovella.

Se la prima coppia di cilindri, in corrispondenza del primo giro, in cui avviene la combustione, interessa quelli identificati con 1-3, nel giro successivo la combustione interesserà nell'ordine la coppia di cilindri 4-2. Analoga sequenza si ripeterà per i successivi cicli.

Di conseguenza, se si vogliono mettere a confronto diverse sequenze relative alle fasi di combustione e detonazione, si devono pendere in considerazione soltanto le combustioni che interessano la stessa coppia di cilindri.

Nel seguito saranno riportati i risultati riguardanti le prove di tipo video-grafico ed accelerometrico effettuate su un motore commerciale a banco, tipo CHRYSLER VM (v. Appendice E.2), nelle condizioni di lavoro: 2500rpm, carico 500Nm e 45kW.

6.2 Set-up delle prove

La metodologia messa a punto, in questa seconda parte della ricerca, ha fatto uso di due tipi di segnali: video-grafici e accelerometrici.

Le informazioni ottenibili dai segnali accelerometrici e da quelli video-grafici sono complementari. Infatti, dai primi è possibile ricavare dettagli morfo-vibrazionali che per loro natura avvengono ad alta velocità ed in intervalli temporali molto ridotti (si pensi ad esempio al tempo necessario affinché si inneschi e si propaghi la fase riguardante la combustione). Da qui la necessità di campionare tali eventi in alta densità (100kHz).

Di contro, fenomeni, che nel loro complesso si sviluppano in tempi relativamente più lunghi (quali ad esempio le vibrazioni indotte sull'intero complesso meccanico dalle forze d'inerzia generate dal manovellismo e dalla combustione) ovviamente possono essere campionati a bassa densità (5kHz) senza con ciò perdere dettagli utili anche qui di tipo morfo-vibrazionali.

Il *set-up* della sala prove consente: 1) l'acquisizione in parallelo, di segnali accelerometrici, attraverso l'impiego di 3 accelerometri monodirezionali fissati solidalmente in testa al motore, 2) l'acquisizione del segnale tachimetrico e 3)

l'acquisizione del segnale video-grafico generato da uno spot laser fissato solidalmente al motore. Il puntino luminoso così generato viene proiettato su un pannello di *plexiglass* e ripreso da una telecamera veloce (circa 5000 frames/s).

La Fig. 6.2 illustra schematicamente l'intero *set-up*, tra cui anche il motore collegato al freno dinamometrico. Su tale motore è stato fissato un cubetto di ferro sulle cui facce sono stati disposti gli accelerometri (monoassiali) che rilevano le accelerazioni lungo le tre direzioni x , y e z secondo lo schema illustrato in Fig. 6.2. Nella stessa sono visibili gli amplificatori di segnale interposti tra l'accelerometro e lo SCADAS LMS (*data logger*). Come evidenziato ancora in figura, il segnale tachimetrico è stato rilevato ed acquisito contemporaneamente attraverso lo stesso SCADAS LMS collegato per la registrazione dei segnali ad un pc portatile. In figura è illustrato lo *spot-laser* che proietta un punto luminoso sul pannello che a sua volta è ripreso da una telecamera veloce i cui *frames* sono archiviati in tempo reale su PC dedicato.

Gli accelerometri impiegati sono 3 Brüel & Kjær monoassiali, tipo 4395 la cui scheda tecnica è riportata in Appendice B.2, mentre la scheda tecnica relativa agli amplificatori di segnale è riportata in Appendice B.1.

La telecamera veloce è una Photron fastcam dotata di una scheda pci dedicata e di uno specifico software di acquisizione. Anche in questo caso la scheda tecnica è riportata in Appendice B.6.

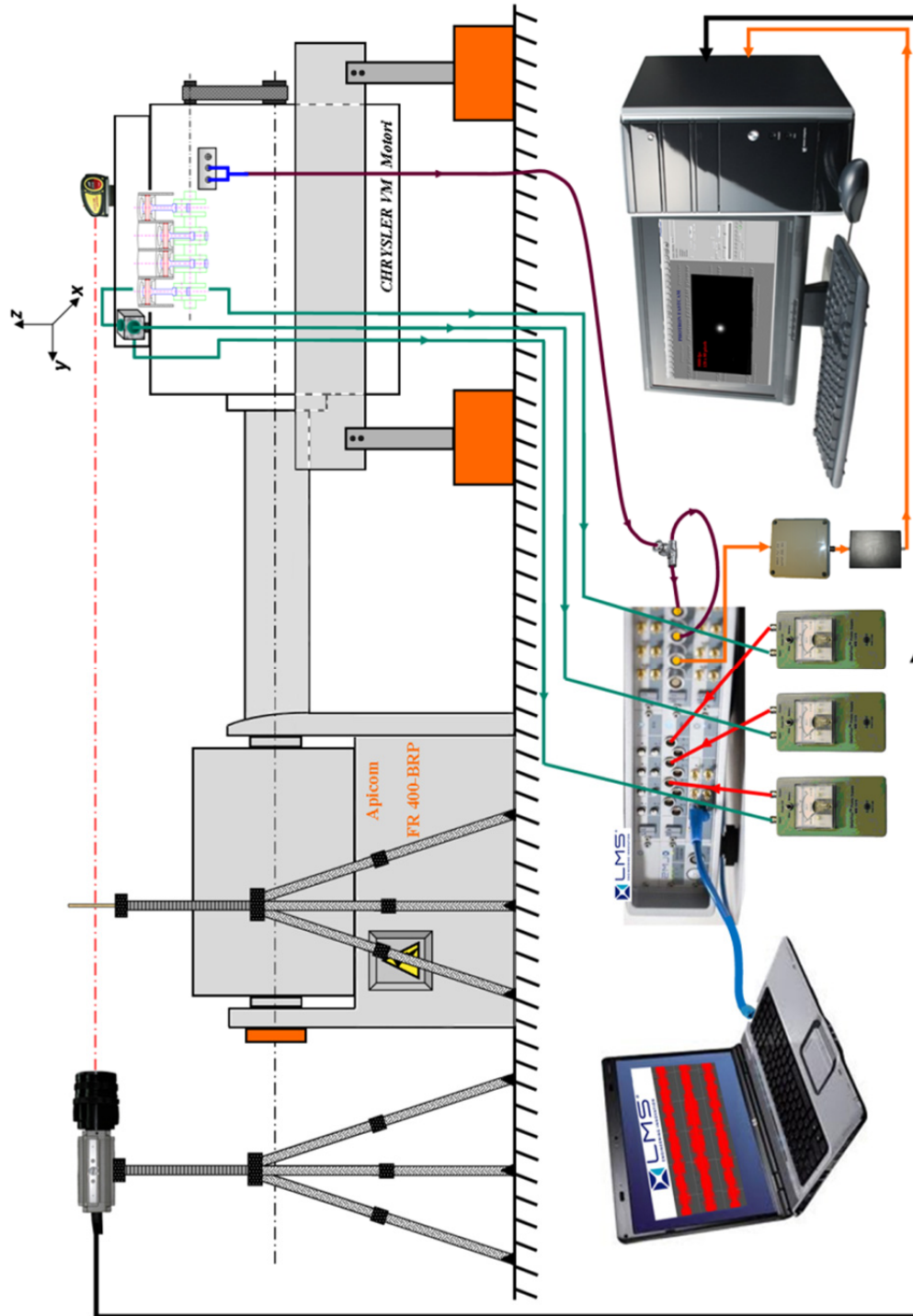


Fig. 6.2

In Fig. 6.3 ed in Fig. 6.4 è riportato il set-up sperimentale schematizzato in Fig. 6.2. In particolar modo in Fig. 6.3 è visibile la telecamera veloce che riprende il pannellino sul quale è proiettato il puntatore laser saldamente fissato al motore.

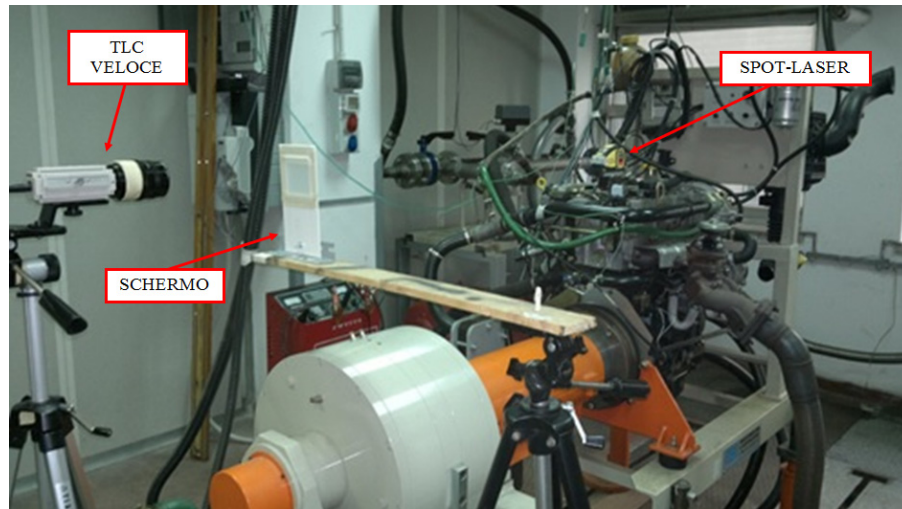


Fig. 6.3

In Fig. 6.4 è meglio evidenziato lo spot laser, fissato come detto al motore, ed i 3 accelerometri monoassiali per il rilevamento delle accelerazioni nelle 3 direzioni illustrate in figura (assi x , y e z).

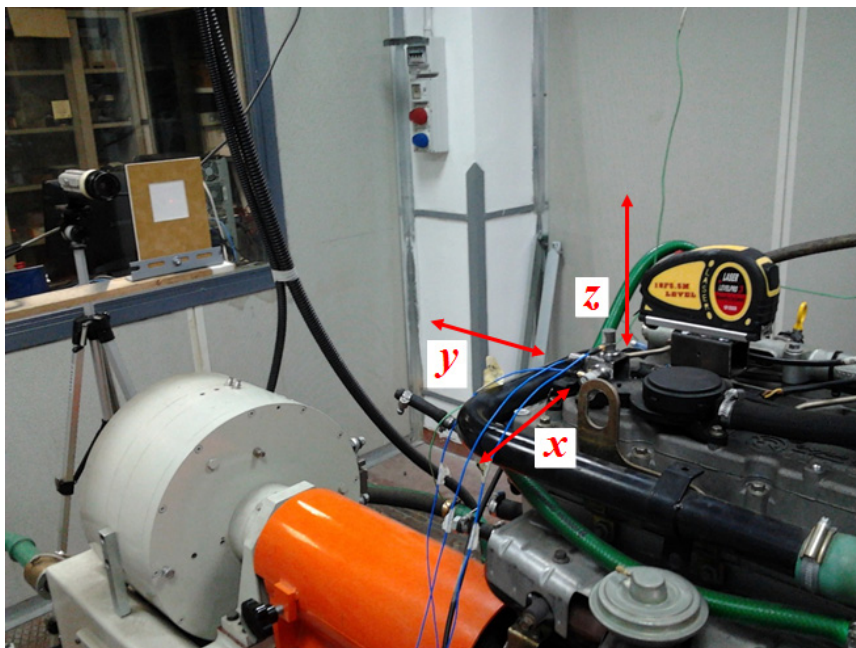


Fig. 6.4

6.3 Lo stato di “salute” del motore

Prima di procedere alla descrizione della metodica sviluppata si sottolinea l'importanza della preliminare attività tesa a valutare lo stato di funzionamento sia

meccanico che termodinamico del “sistema motore” nel suo complesso, al cosiddetto “tempo zero”. Tale attività è volta a stabilire lo “stato di salute” del motore prima di procedere al monitoraggio. In altre parole, non conoscendo la *time history* del motore, sono state messe a confronto le forze teoriche (di origine inerziale e derivanti dalla fase di combustione) che si esplicano per effetto del manovellismo con quelle realmente rilevate (sia per via accelerometrica sia attraverso riprese effettuate a mezzo telecamera veloce). La suddetta attività preliminare ha portato alla conclusione che il motore non presentava particolari “problematiche” nel suo funzionamento. Pertanto, la dinamica morfo-vibrazionale rilevata poteva essere assunta come quella di riferimento al tempo zero (*baseline*).

Si premette che, per comodità di elaborazione delle serie temporali discrete, faremo riferimento (salvo ove specificamente indicato) ad unità di tempo adimensionalizzate ricavabili facilmente dalla indicizzazione delle serie numeriche. Il riferimento alla unità di tempo adimensionalizzata è funzione della frequenza di campionamento.

In Fig. 6.5 è riportato il segnale accelerometrico relativo all’asse z, ossia quella che prevalentemente segue la dinamica accelerometrica determinata dalla coppia stantuffo-biella.

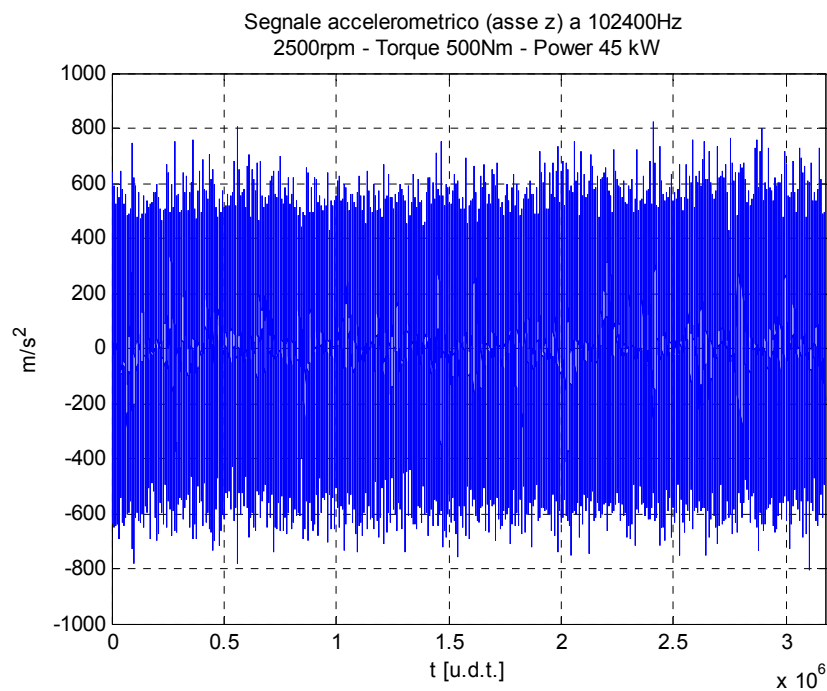


Fig. 6.5

In Fig. 6.6 si riporta un dettaglio dello stesso segnale accelerometrico.

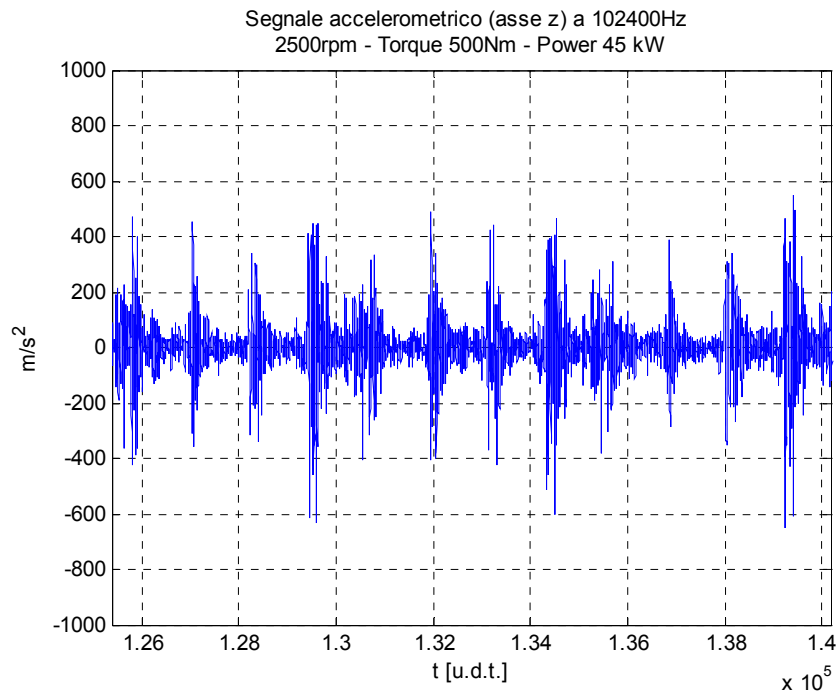


Fig. 6.6

Il segnale tachimetrico, riportato nella Fig. 6.7, è rilevato attraverso il *pick up* (capacitivo) della ruota fonica, di cui è dotato il motore (v. Appendice E.2). Il segnale, campionato ad una frequenza di 102400Hz, si riferisce ad una velocità di rotazione del motore di 2500rpm, con un carico di 500Nm corrispondente ad una potenza di 45kW.

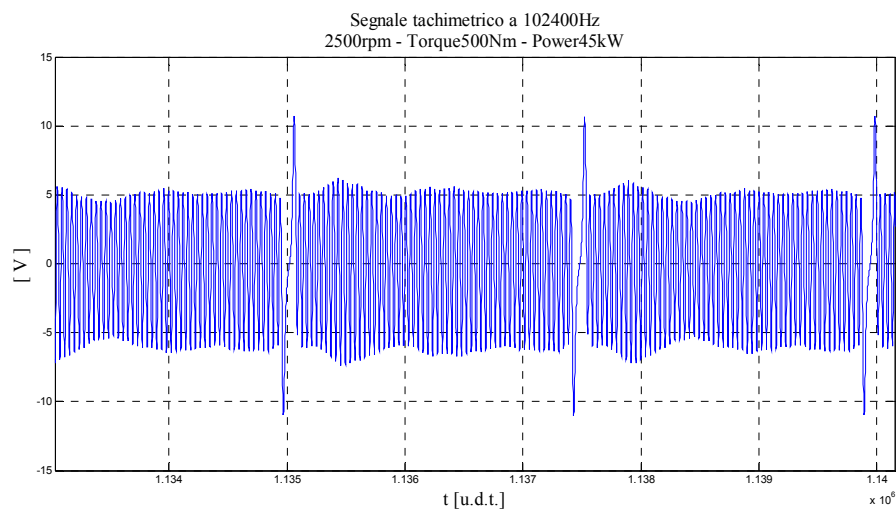


Fig. 6.7

Tale segnale è di tipo elettrico, misurato in Volt, ed ha andamento pseudo-sinusoidale. Esso è adoperato come riferimento per sincronizzare sia le acquisizioni accelerometriche che quelle video.

Il suddetto segnale, è stato utilizzato anche per estrarre i segnali video ed accelerometrici corrispondenti ad un giro completo dell'albero motore (periodo).

Di seguito alcune necessarie precisazioni.

Il segnale tachimetrico è acquisito, mediante il sistema LMS, ad una frequenza, come detto, di campionamento pari a 102400Hz così come i segnali accelerometrici rilevati nelle direzioni dei tre assi ortonormali x , y , z , rispettivamente trasversale, longitudinale (asse dell'albero a gomiti) e verticale.

I segnali video sono stati rilevati ad una frequenza di acquisizione di 5000fps (5000Hz); quindi nel caso di riallineamento temporale tra i segnali accelerometrici ed il segnale video si rende necessario "ricampionare" il segnale tachimetrico ad una frequenza di 5000Hz.

Tale operazione è stata resa possibile attraverso la *function built-in* di Matlab "*resample*".

In Fig. 6.8 è riportato il segnale tachimetrico ricampionato così come sopra.

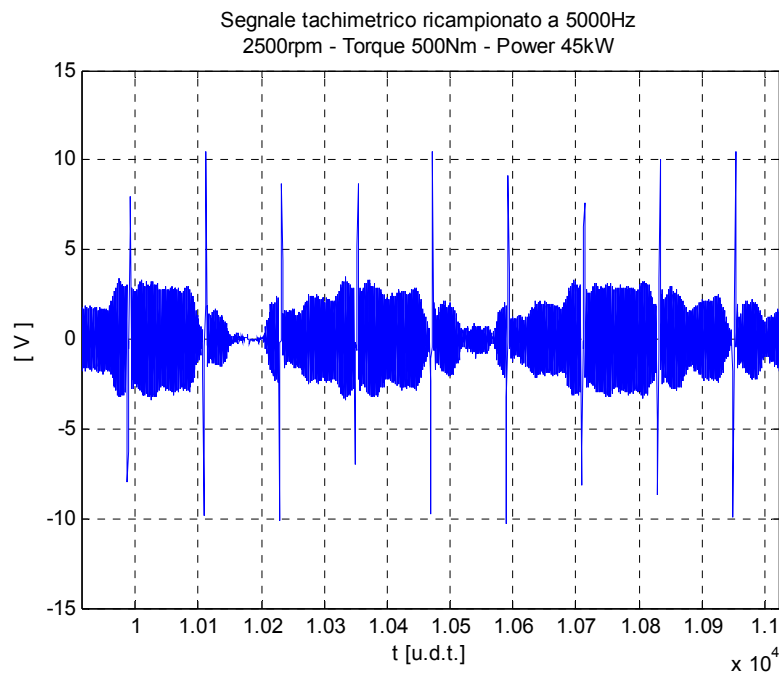


Fig. 6.8

Sull'asse delle ascisse vi è il tempo espresso in u.d.t. mentre sulle ordinate la tensione espressa in volt.

Si nota la presenza di valori (picchi) molto al di sopra della media, che si producono in corrispondenza dell'istante in cui il *pick up* rileva la mancanza di uno dei 58 denti montati sulla ruota “fonica” del motore. L'intervallo temporale compreso tra due picchi consecutivi corrisponde ad 1 giro completo dell'albero a gomiti.

Le acquisizioni video, effettuate mediante la telecamera veloce, permettono di osservare il moto del punto luminoso generato dal puntatore laser e proiettato sullo schermo in plexiglass.

Il raggio laser proiettato sullo schermo, successivamente visualizzato sul PC appare come un punto luminoso di colore bianco e di forma tondeggianti su di uno sfondo nero. In Fig. 6.9 è visibile la posizione del punto luminoso visualizzato sullo schermo del PC in 30 *frames* successivi.

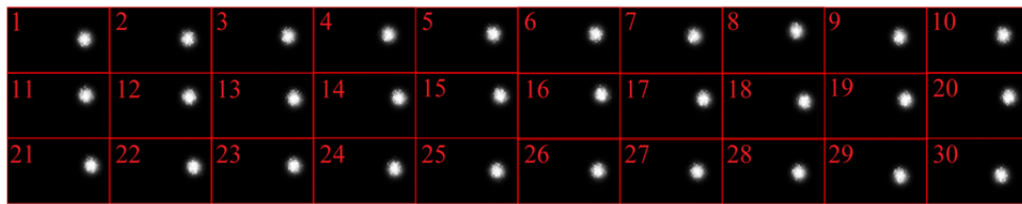


Fig. 6.9

La durata dell'acquisizione, pari a 2.6208s, consente di acquisire 13104 *frames*. È stato quindi necessario sviluppare in ambiente Matlab un *tool* specifico dedicato all'individuazione del “centroide” (punto luminoso) presente in ciascun frame per poterne analizzare gli spostamenti su un sistema ortogonale bidimensionale (xz).

In Fig. 6.10 ciascun punto rappresenta la posizione dello “spot” luminoso (centroide) rilevato sullo schermo durante il compimento di un solo giro dell'albero motore, durante il quale avviene la fase di combustione e detonazione di una coppia di cilindri; gli spostamenti sia nella direzione dell'asse delle x ($\delta_s x$) che nella direzione dell'asse z ($\delta_s z$) sono espressi in *pixel*.

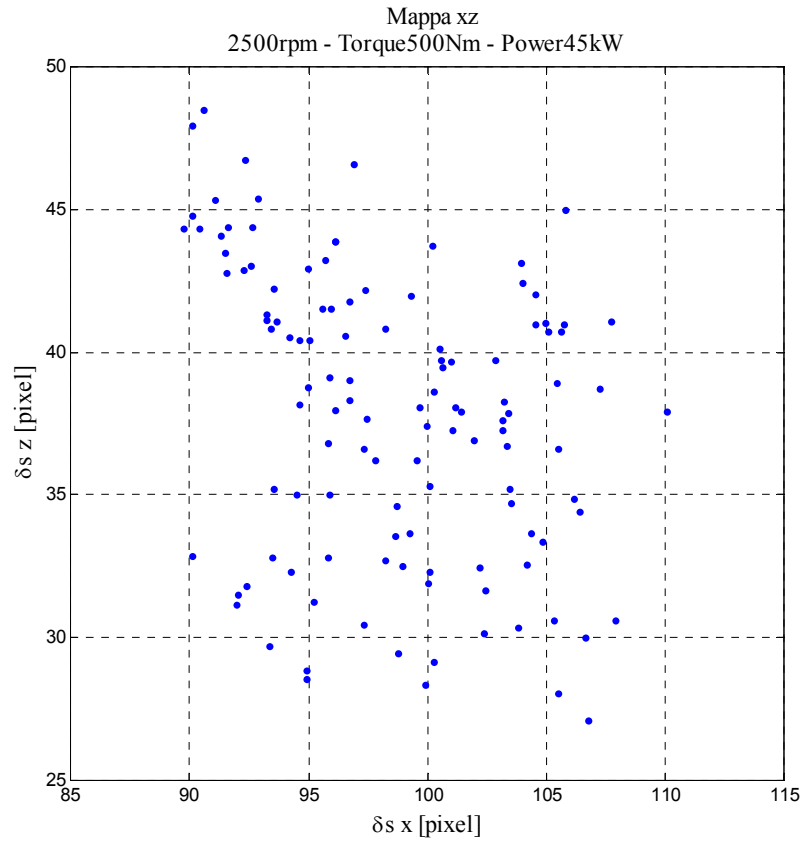


Fig. 6.10

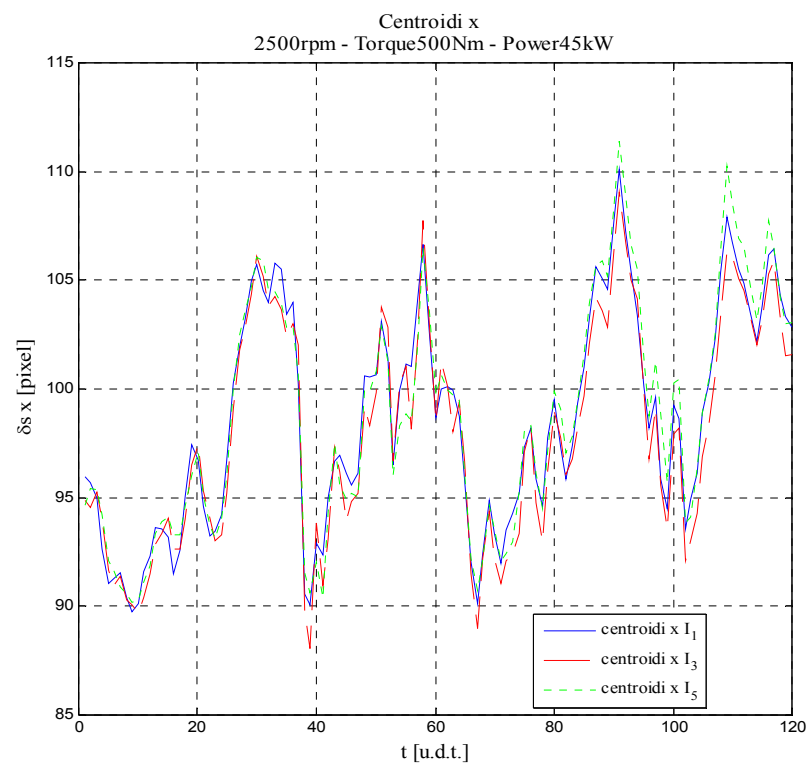


Fig. 6.11

In Fig. 6.11, è riportato in ascissa il tempo adimensionalizzato “unità di tempo” [u.d.t.]; in ordinate gli spostamenti δ_s del centroide nella direzione dell’asse x espressi in [pixel].

Si osservi che l’albero motore compie, nelle condizioni di funzionamento fissate, cioè 2500rpm, un giro completo in 0.024s. Avendo acquisito i frames alla frequenza di campionamento di 5000Hz, le u.d.t. che corrispondono ad un giro completo dell’albero motore si ottengono impostando la seguente relazione: $0.024[s]5000[Hz] = 120[u.d.t.]$, vale a dire che 120 frames sono necessari per osservare un giro completo dell’albero motore.

Com’è noto sia le forze di inerzia, nonché le forze che si esplicano per effetto della combustione, determinate per via teorica e relative alla rotazione sia della biella che della manovella, generano gli spostamenti del centro di gravità (baricentro) del blocco motore lungo la direzione dell’asse x ; esse sono diagrammate in Fig. 6.12 in funzione dell’angolo (rad) di rotazione della manovella “*crank angle*”.

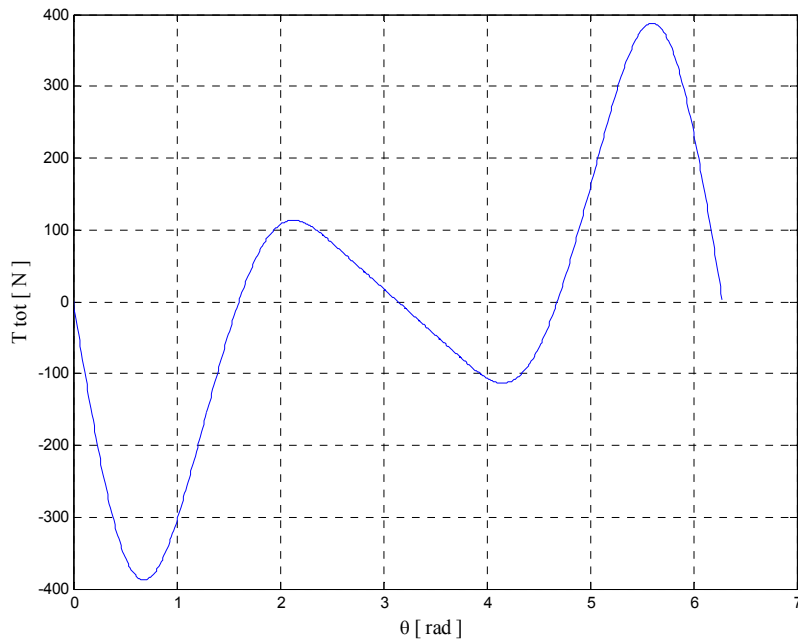


Fig. 6.12

In ascisse è riportato il crank angle, indicato con θ , espresso in radianti (rad); in ordinate la risultante T_{tot} delle forze di inerzia suddette, in Newton [N].

Si precisa che questo diagramma è puramente teorico essendo stato ottenuto dall'applicazione delle leggi sul manovellismo.

In Fig. 6.13 si riportano in ascisse gli spostamenti δ_s del centroide lungo la direzione x relativi alle detonazioni consecutive dei cilindri, individuati come 1 e 3, in due cicli successivi omologhi ($\delta_s x I_1$ e $\delta_s x I_3$).

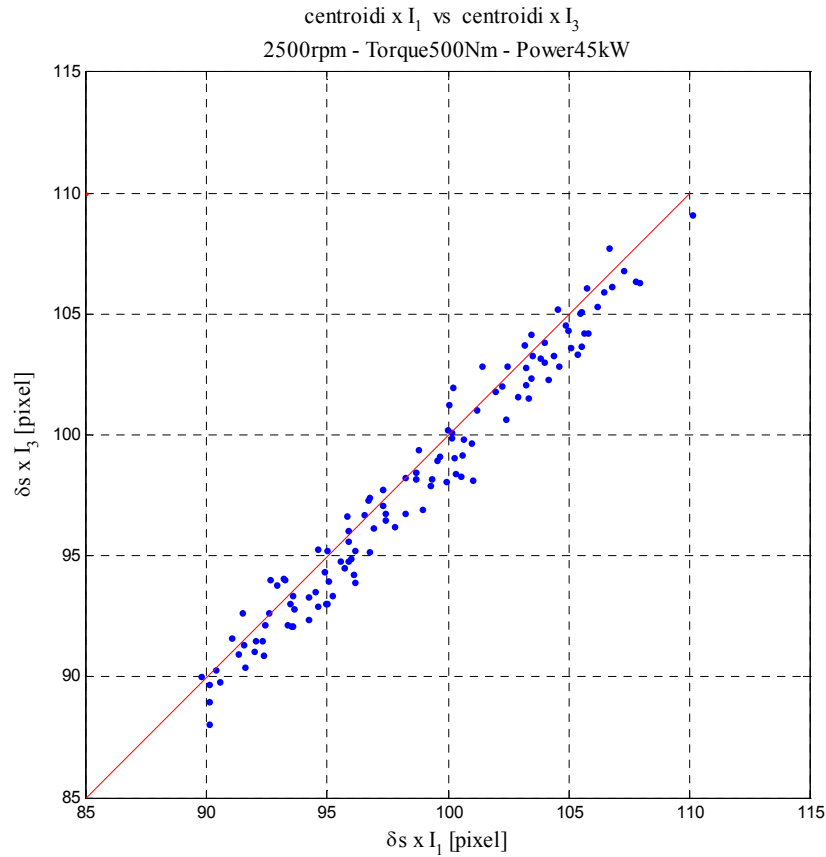


Fig. 6.13

Si ricorda che il coefficiente di correlazione (regressione) lineare di Pearson vale:

$$r = \frac{\sum_m \sum_n (A_{mn} - \bar{A})(B_{mn} - \bar{B})}{\sqrt{\left(\sum_m \sum_n (A_{mn} - \bar{A}) \right)^2 \left(\sum_m \sum_n (B_{mn} - \bar{B}) \right)^2}}$$

Per il diagramma riportato in Fig. 6.13, $r = 0.9827$.

Di seguito (Fig. 6.14) si riportano gli spostamenti esibiti dallo *spot laser* nella direzione dell'asse z . Si ricorda che tale direzione è quella lungo la quale prevalentemente si sviluppa il moto alternativo delle bielle e degli stantuffi.

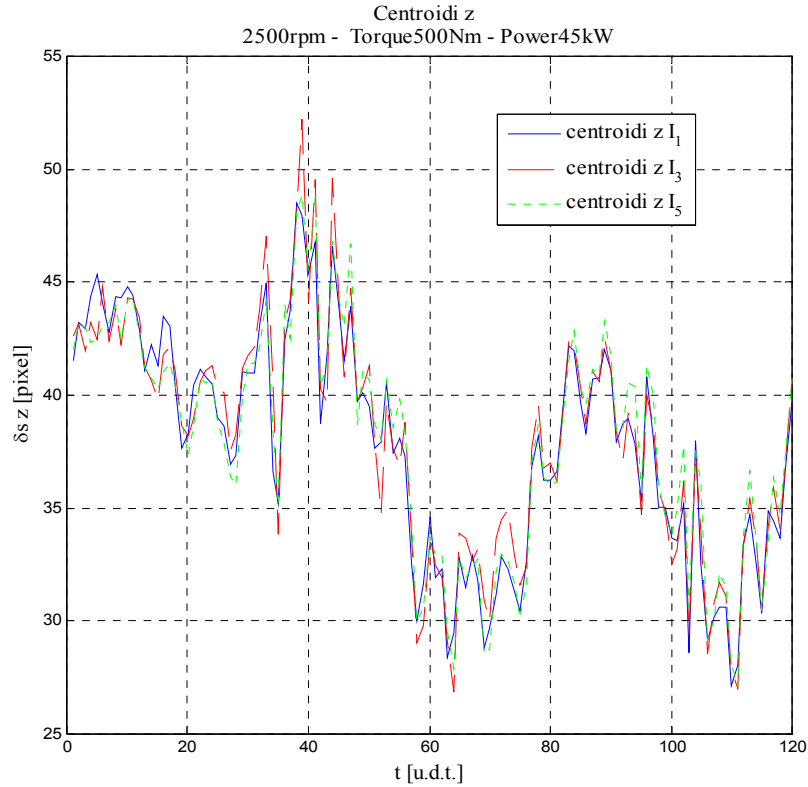


Fig. 6.14

Nella Fig. 6.14 è riportato sull'asse delle ascisse il tempo adimensionalizzato [u.d.t.] e sull'asse delle ordinate gli spostamenti δ_s del centroide questa volta relativi alla direzione z , espressi in [pixel], per tre detonazioni in sequenza riferita alle stesse coppie di cilindri (1,3).

Anche in questo caso la figura si riferisce ad un solo giro dell'albero motore, durante il quale avviene la detonazione della stessa coppia di cilindri.

In Fig. 6.15 è riportato l'andamento teorico della risultante T_{tot} delle forze di inerzia e di combustione dovute prevalentemente al moto alternativo della biella, nonché della manovella e dello stantuffo. Il valore della risultante T_{tot} è riportato sulle ordinate, espresso in Newton, in funzione del crank angle θ , espresso in radianti, riportato in ascisse.

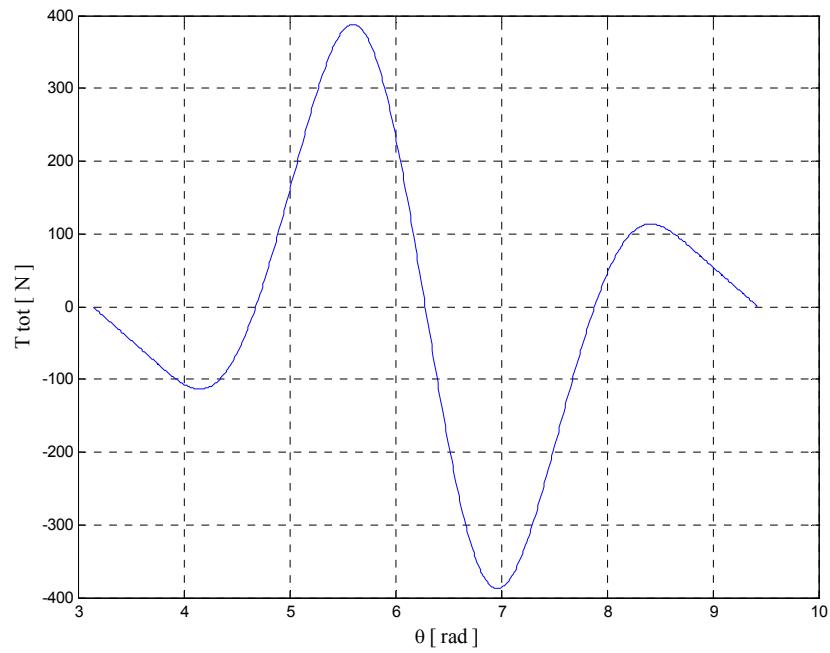


Fig. 6.15

Riportando, Fig. 6.16, in ascisse gli spostamenti $\delta_s z I_1$ e in ordinate gli spostamenti $\delta_s z I_3$ si osserva l'addensarsi dei punti, così costruiti, vicino alla bisettrice.

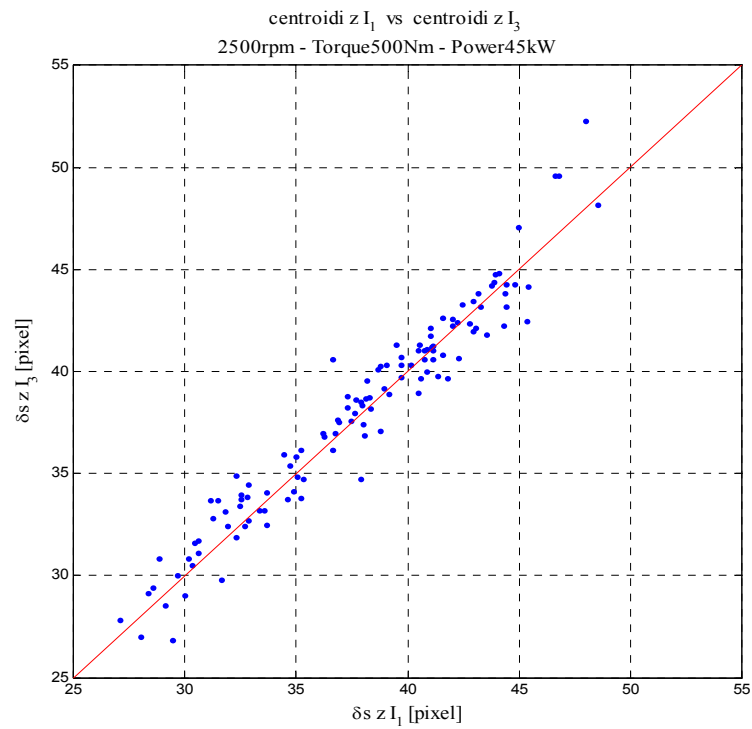


Fig. 6.16

Anche in questo caso si è determinato il coefficiente di correlazione:
 $r = 0.9695$.

Fino a questo momento sono stati analizzati gli spostamenti del centroide lungo le due direzioni x e z rispettivamente. Nella Fig. 6.17 tali spostamenti sono stati rappresentati su base temporale.

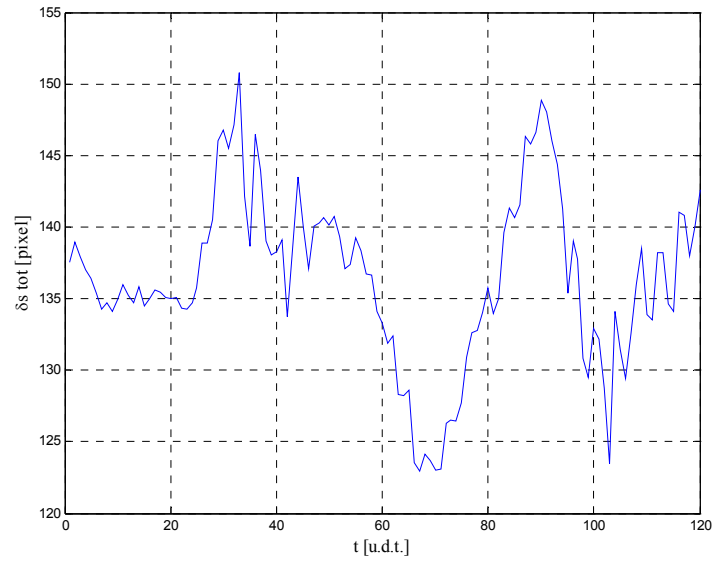


Fig. 6.17

Sull'asse delle ascisse sono rappresentate le u.d.t. e sulle ordinate la risultante degli spostamenti nelle due direzioni x e z .

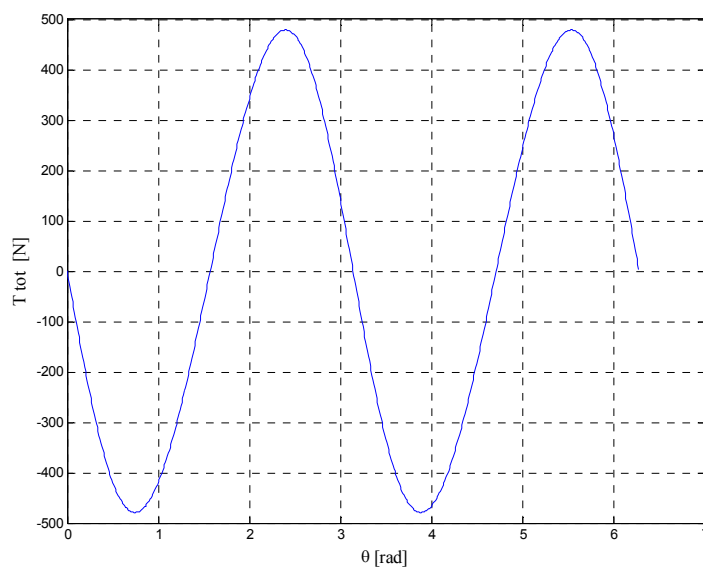


Fig. 6.18

In Fig. 6.18. è riportato il corrispondente andamento teorico causato da tutte le forze di inerzia e di combustione che agiscono sul motore durante un giro dell'albero motore.

Al variare dell'angolo θ è possibile determinare il valore che assume la risultante delle suddette forze.

Di seguito si riportano (così come fatto nelle Fig. 6.11, Fig. 6.14 e Fig. 6.17) gli spostamenti esibiti dallo spot laser, a seguito dei processi di combustione che avvengono nei cilindri 4-2, nella direzione dell'asse x (Fig. 6.19), dell'asse z (Fig. 6.20) nonché la composizione della loro somma (Fig. 6.21).

Anche in questo caso le figure si riferiscono ad un solo giro dell'albero motore, durante il quale avvengono le detonazioni in successione, della sola coppia di cilindri II.

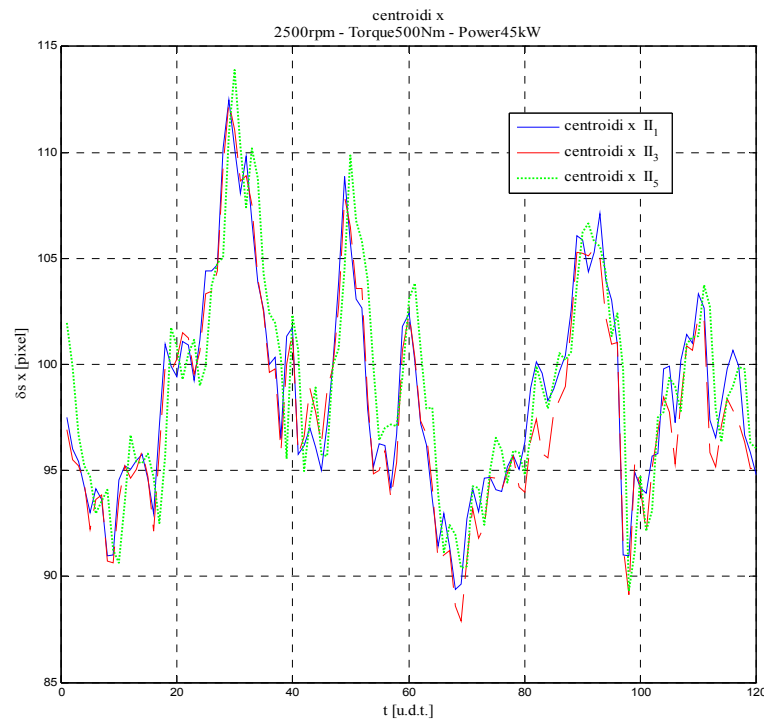


Fig. 6.19

Nella Fig. 6.19 è riportato sull'asse delle ascisse il tempo adimensionalizzato [u.d.t.] e sull'asse delle ordinate gli spostamenti δ_s del centroide relativi alla direzione x espressi in [pixel].

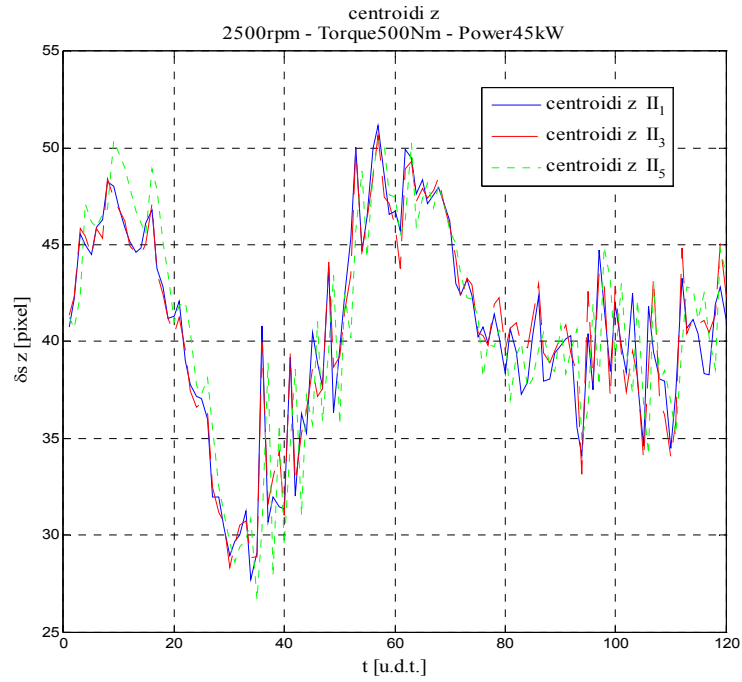


Fig. 6.20

Nella Fig. 6.20 sull'asse delle ascisse sono rappresentate le u.d.t. e sulle ordinate gli spostamenti δ_s del centroide relativi alla direzione z espressi in [pixel].

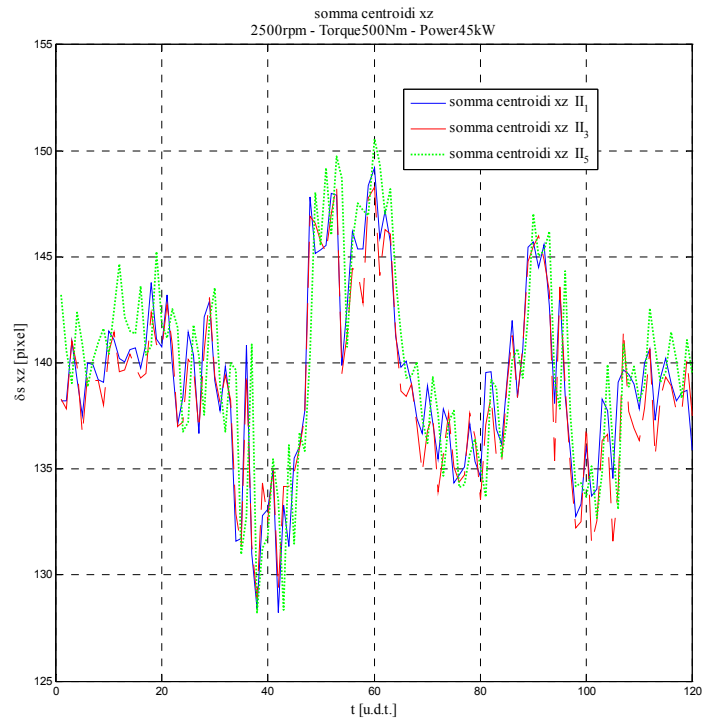


Fig. 6.21

Nella Fig. 6.21 è riportato sull'asse delle ascisse il tempo adimensionalizzato [u.d.t.] e sull'asse delle ordinate la risultante degli spostamenti nelle direzioni x e z .

Ricorrendo alla metodologia riportata al par. 3.6.2, si procede ad analizzare il segnale senza fare ipotesi a priori circa le sue caratteristiche dinamico-evolutive, prescindendo dalla sua frequenza di campionamento: stazionario, quasi stazionario, caotico.

Come già esposto nel par. 3.6.2, la metodologia proposta consente la determinazione di un parametro (K_{ω}) che sia, oltre che dal punto di vista visivo, anche da un punto di vista della risposta quanto più possibile bivalente, nel senso che se il sistema tende ad essere regolare, esso deve tendere a 0, se invece è instabile deve tendere a 1, e ciò anche se il segnale è affetto da *noise*.

Valori intermedi si possono verificare allorquando si alternano periodi di regolarità a periodi di irregolarità.

Con l'applicazione di questa metodologia e con l'ausilio di un apposito *tool* implementato in ambiente Matlab, è stato possibile determinare la mappa che descrive gli spostamenti compiuti dal centroide nella direzione z con riferimento alla coppia di cilindri I per tre detonazioni successive (Fig. 6.22).

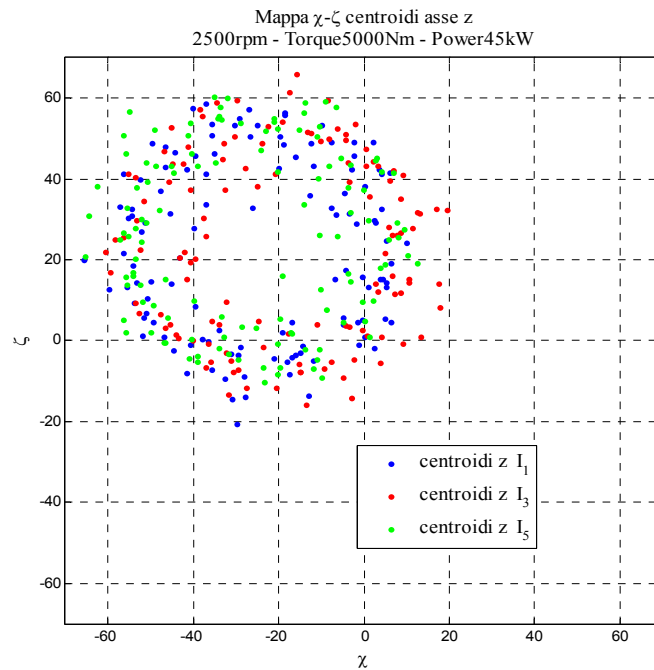


Fig. 6.22

In Fig. 6.23 è rappresentato il parametro K_ω al variare di ω . Sull'asse delle ascisse è riportato l'angolo ω espresso in radianti, sulle ordinate il coefficiente adimensionale K_ω .

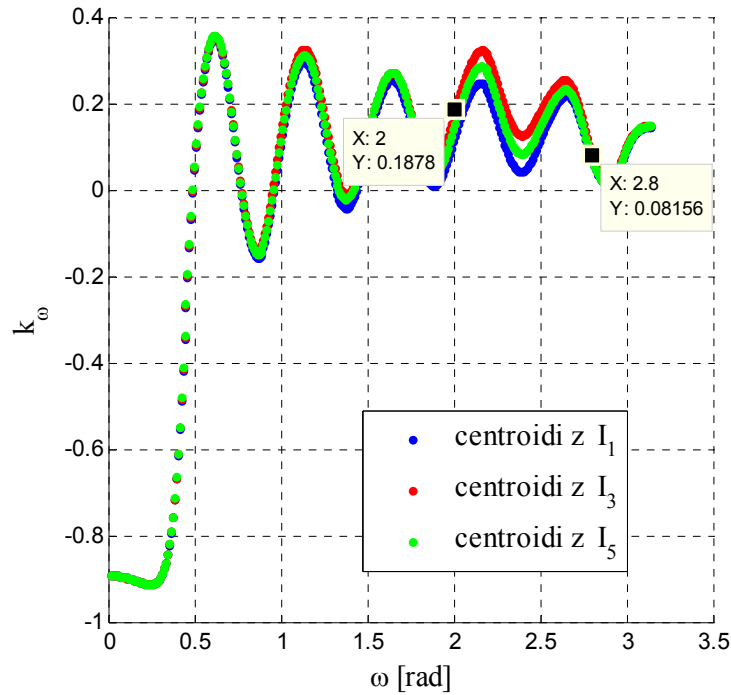


Fig. 6.23

Usando la medesima metodologia è stata riportata in Fig. 6.24 la mappa degli spostamenti compiuti dal centroide nella direzione x (sempre con riferimento alla fase di combustione che avviene nella stessa coppia di cilindri).

Nella Fig. 6.25 è riportato il relativo diagramma K_ω vs ω .

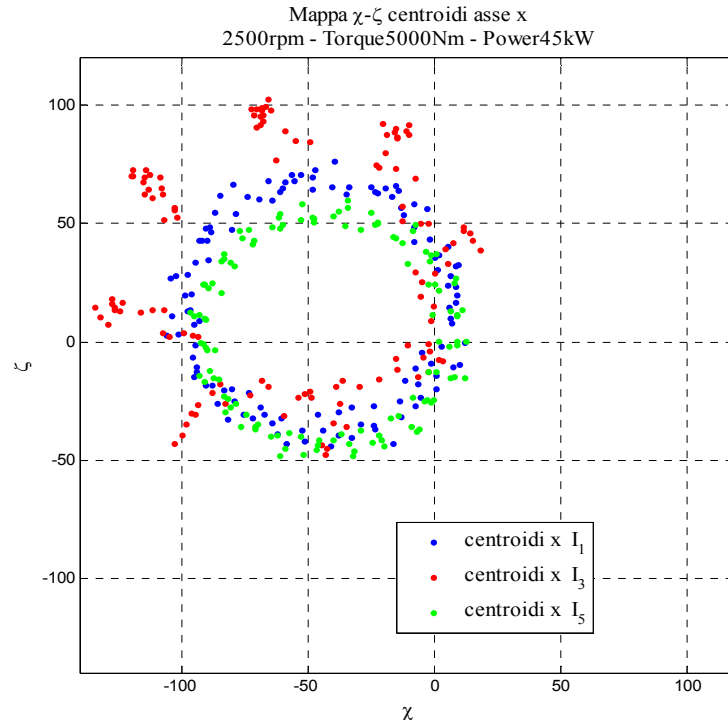


Fig. 6.24

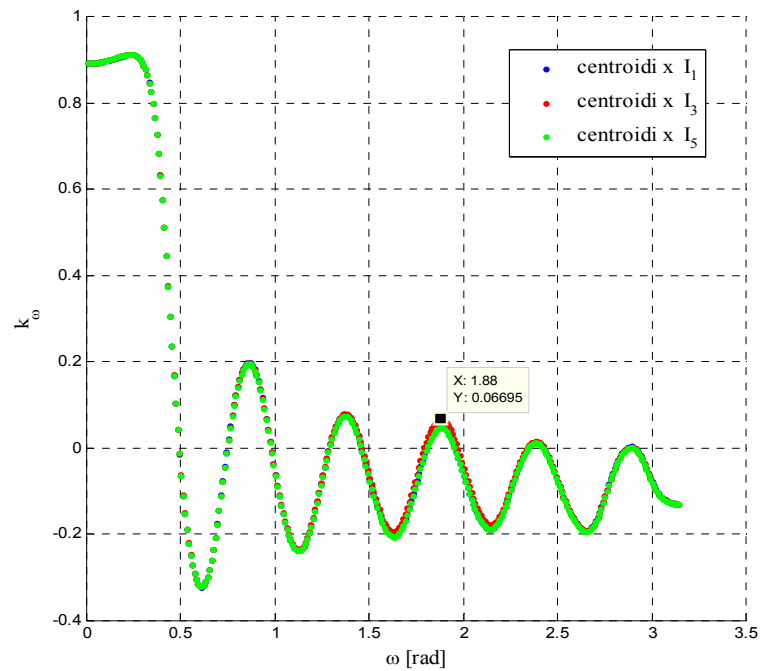


Fig. 6.25

Per fornire un quadro più completo dei risultati si riporta in Fig. 6.26 la mappa ottenuta con la suddetta metodologia relativamente alla composizione dei moti rispetto alla coppia di assi x , z .

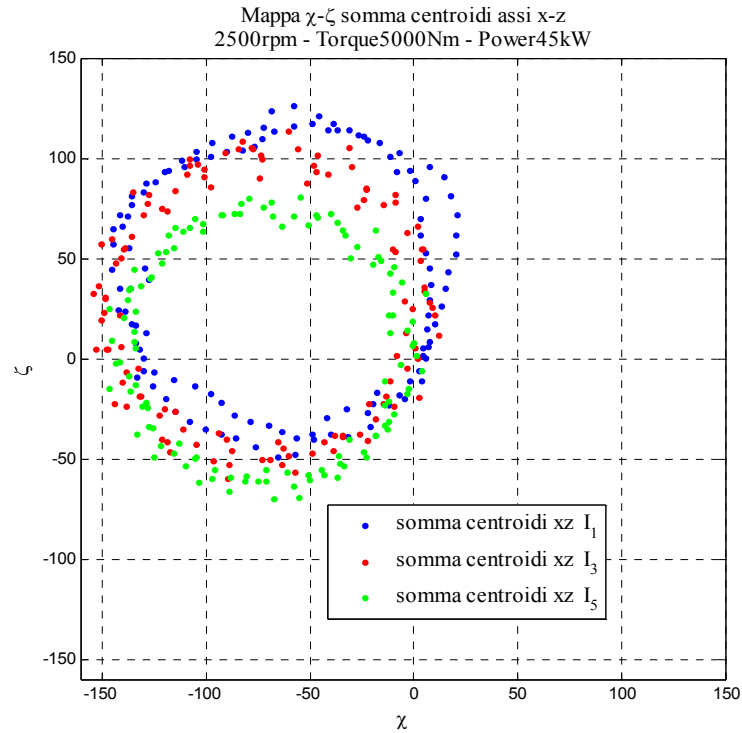


Fig. 6.26

Prima di illustrare il diagramma successivo (Fig. 6.27) si vuole porre l'attenzione circa la non perfetta sovrapposizione delle curve K_ω - ω in alcuni intervalli limitati di ω .

Ciò è ascrivibile alla presenza di un certo grado di irregolarità del numero di giri e del grado di irregolarità del freno a correnti parassite che possono causare, in maniera ancora più evidente quando si combinano, una combustione più violenta ed irregolare, corretta successivamente, nel caso si ripresentassero le stesse condizioni termodinamiche, dalla centralina elettronica del motore; questa infatti, se del caso, potrebbe agire anticipando/ritardando la fasatura che se non corretta tempestivamente potrebbe generare, ad esempio, un'anomala sovralimentazione.

In Fig. 6.27 sull'asse delle ascisse è riportato l'angolo ω espresso in radianti, sulle ordinate il coefficiente adimensionale K_ω .

Si noti che nella finestra $\Delta\omega = 2.06 - 1.27 = 0.79\text{rad}$, equivalenti a circa 46° di manovella, si osserva una significativa variabilità nell'andamento di tre cicli omologhi consecutivi legati in particolare alle fasi di combustione (si veda anche il diagramma polare delle fasi del motore, Appendice E, Fig. E.6).

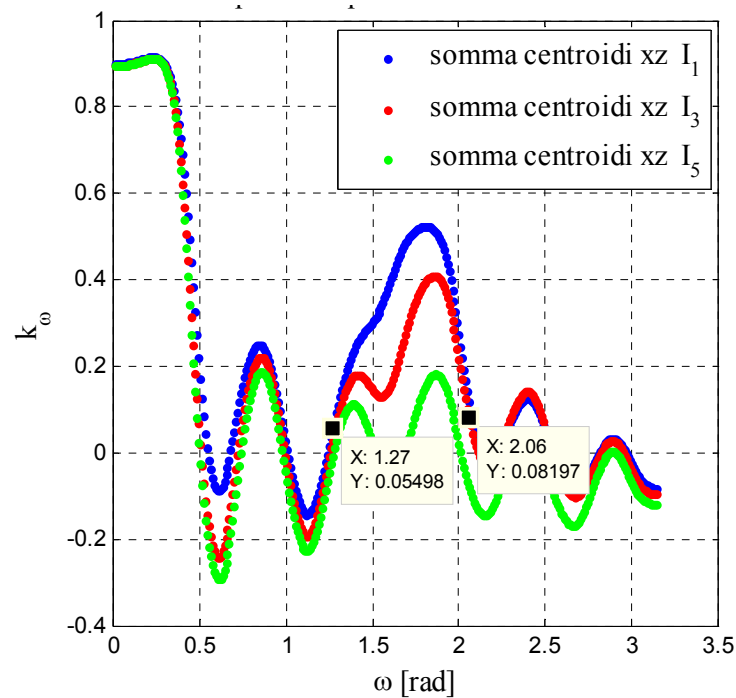


Fig. 6.27

Per concludere questa disamina relativa agli spostamenti dei centroidi nel piano xz , con riferimento a quanto detto relativamente alla Fig. 6.10, si propone nella figura seguente (Fig. 6.28) un confronto fra le posizioni assunte dai centroidi in corrispondenza della prima e terza detonazione dei cilindri I.

Nel grafico di Fig. 6.29 è riportato lo spettro di frequenza relativo alla dinamica accelerometrica esibita dai 4 cilindri nella direzione dell'asse z , relativa a più cicli completi. Sull'asse delle ascisse sono riportate le frequenze espresse in Hz, mentre sull'asse delle ordinate sono riportati i moduli/ampiezza relativi a ciascuna armonica.

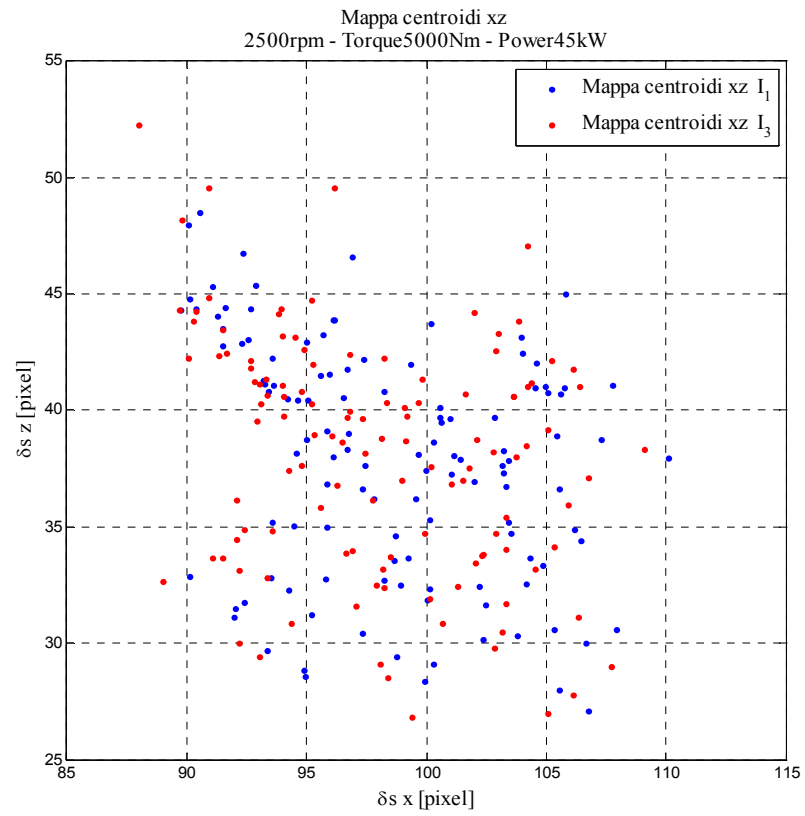


Fig. 6.28

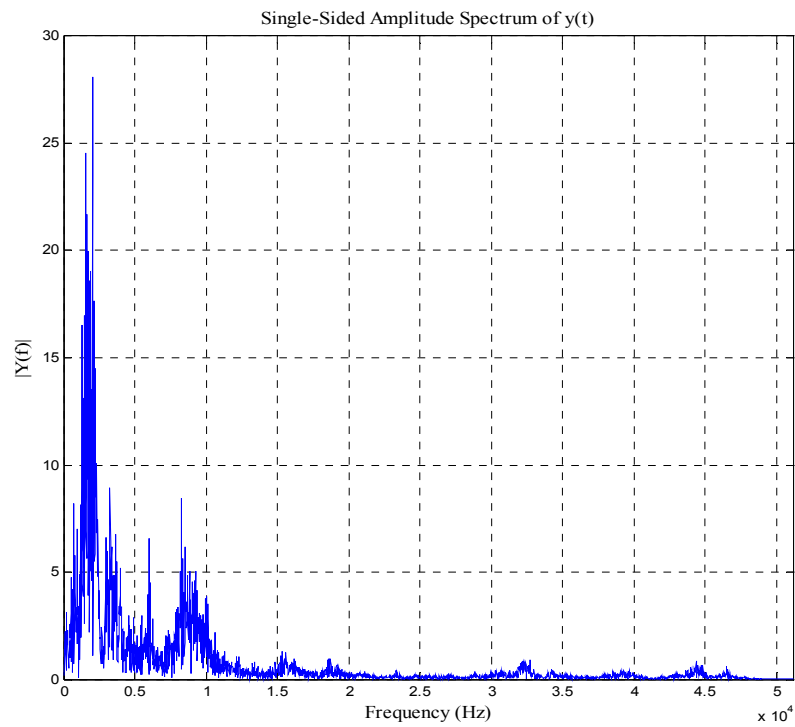


Fig. 6.29

In Fig. 6.30 è rappresentato un dettaglio dello spettro di frequenza di cui sopra per meglio mostrare la presenza delle ottave superiori alla frequenza base pari a circa 41.71Hz (2500rpm), nonché quelle superiori (la seconda a circa 83Hz, la quarta a circa 166Hz, ecc.).

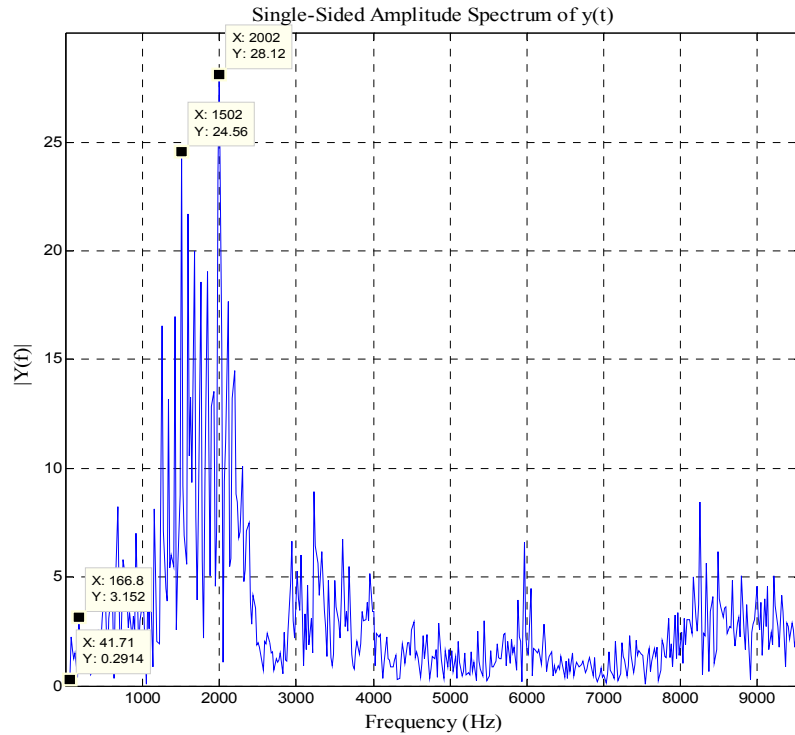


Fig. 6.30

6.4 La PMI_v – Pressione Media vibrazionale

Le strumentazioni adoperate nella caratterizzazione del motore, nonché la metodologia di *signal processing* proposta, che consente di osservare la cosiddetta “*morfodinamica vibrazionale*”, consentiranno di osservare l’andamento equivalente al diagramma P.M.I. nel dominio del tempo ovvero su quello angolare (*crank-angle*). Esso tiene conto della dinamica accelerometrica, registrabile attraverso la dinamica inerziale esibita dal motore, e della sua morfologia estrapolabile attraverso la convoluzione che verrà fatta tra tale segnale ed un opportuno filtro wavelet.

Generalmente il diagramma comunemente chiamato P.M.I., è rilevato mediante l’utilizzo di un apposito trasduttore, installato sulla testa della camera di

combustione (*c.c.*) che rileva la variazione della pressione del fluido evolvente durante il normale ciclo termodinamico del motore.

In questo caso invece tale *shape* è stata determinata, come verrà chiarito più avanti, per via accelerometrica. La P.M.I. permette di conoscere moltissime informazioni funzionali relative allo stato di salute del motore, sia dal punto di vista meccanico (meccanica “fredda”), sia dal punto di vista termodinamico (meccanica “calda”).

Da un punto di vista qualitativo il diagramma della P.M.I., così rilevato mostra lo stesso andamento quali-quantitativo, rispetto a quello rilevato con altri metodi (ovviamente con riferimento alle opportune unità di misura).

Per i motori alimentati a gasolio, come quello esaminato, si possono avere sostanzialmente tre tipologie di P.M.I. così come qualitativamente illustrato in Fig. 6.31.

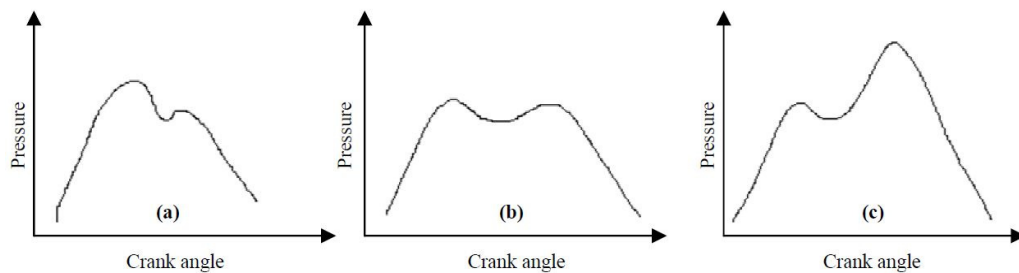


Fig. 6.31

È possibile riconoscere la tipologia (c) nel diagramma della P.M.I.v. vibrazionale, riferito all’intervallo temporale 400000÷550000u.d.t., Fig. 6.32.

In Fig. 6.32 sull’asse delle ascisse è riportato il *crank angle* (in gradi), mentre su quello delle ordinate i coefficienti wavelet (adimensionali).

La curva blu rappresenta il rilevamento accelerometrico in termini di coefficienti wavelet in funzione del crank angle, in un range fra $-30^\circ \div +30^\circ$, per 59 cicli compiuti in sequenza dai 4 cilindri, cioè senza selezionare le coppie di cilindri.

La curva rossa è stata ottenuta dalla blu ricostruendo il segnale con 8 armoniche (A8) mediate geometricamente 59 volte.

PMIv Prova vettore accelerazione direzione z rpm2500 - Torque 500Nm - Power45kW
4 cilindri Scala 1 Periodi 59 A8

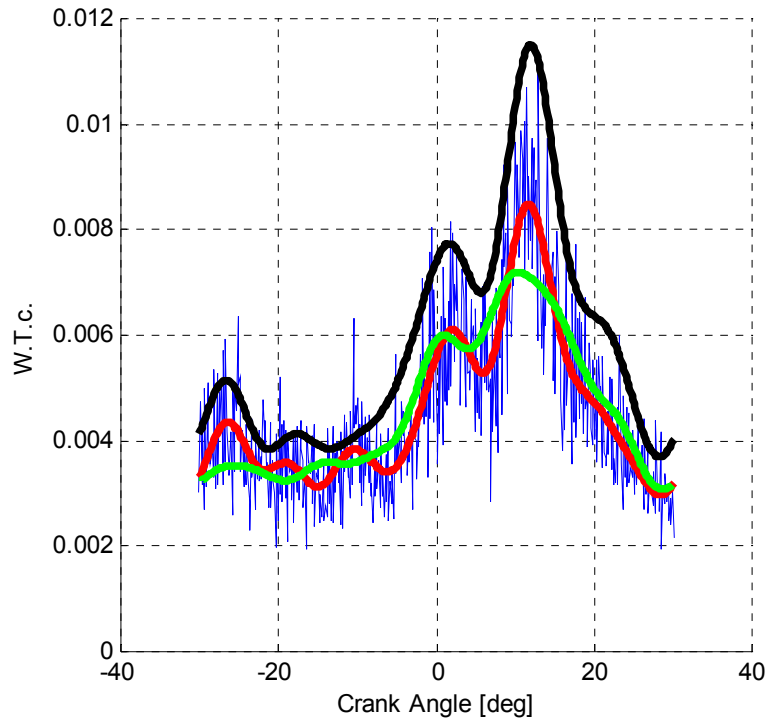


Fig. 6.32

Per evidenziare la ripetibilità del diagramma della PMIv così ottenuta, sono state inserite in Fig. 6.32 altre due curve, cioè quella nera e quella verde. Esse rappresentano, così come quella rossa, la ricostruzione del segnale accelerometrico ottenuta con 8 armoniche mediate 59 volte, ma si riferiscono a rilevamenti accelerometrici temporalmente sfasati rispetto a quello rappresentato in blu.

L'andamento delle curve delle PMI vibrazionali in intervalli di tempo differenti, si presentano, da un punto di vista qualitativo del tutto simili, ciò a riprova della bontà della metodica.

Come detto la metodica prevede che i segnali accelerometrici relativi all'asse z siano elaborati attraverso l'applicazione della convoluzione tra il segnale tal quale e una particolare funzione Wavelet, specifica e selettiva per quanto riguarda il dettaglio che si intende estrarre.

Nella figura che segue (Fig. 6.33) si riportano i coefficienti Wavelet di dettaglio, in scala 3, relativi al filtro Wavelet Db5, con frequenza centrale pari 22756Hz. Il diagramma di colore blu è stato ricostruito considerando la media

geometrica di 50 periodi relativi alle stesse coppie di cilindri I (1-3). Attraverso la loro interpolazione, effettuata utilizzando le prime 40 armoniche di Fourier, si ottiene il diagramma identificato con il colore rosso. Esso consente di individuare l'andamento medio dei cicli di compressione, combustione e parte della fase di scarico.

In ascissa il crank angle consente di identificare meglio le fasi in esso rappresentate. Inoltre sono evidenziate con linee verticali nere e verdi gli intervalli di 60° e di 30° rispettivamente. La scala riportata in ascissa fa riferimento all'angolo θ che identifica il PMS.

In Fig. 6.34 e Fig. 6.35 è mostrato un dettaglio dell'andamento della PMI vibrazionale, ottenuta con 8 armoniche mediate 50 volte, per valori del crank angle compresi fra $-30^\circ \div +30^\circ$ (Fig. 6.34) e fra $-210^\circ \div -150^\circ$ (Fig. 6.35).

Le Fig. 6.34 e Fig. 6.35 si riferiscono all'intervallo di tempo $150001 \div 300000$ u.d.t.

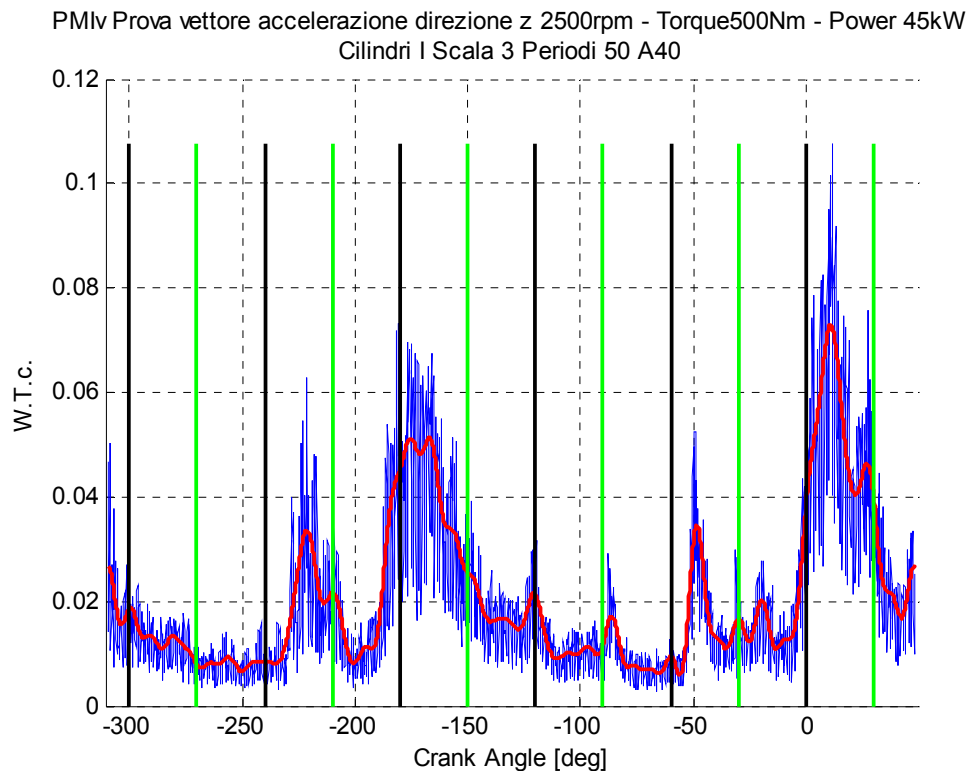


Fig. 6.33

Dettaglio PMlv Prova vettore accelerazione direzione z 2500rpm - Torque500Nm - Power 45kW
Cilindri I Scala 3 Periodi 50 A8

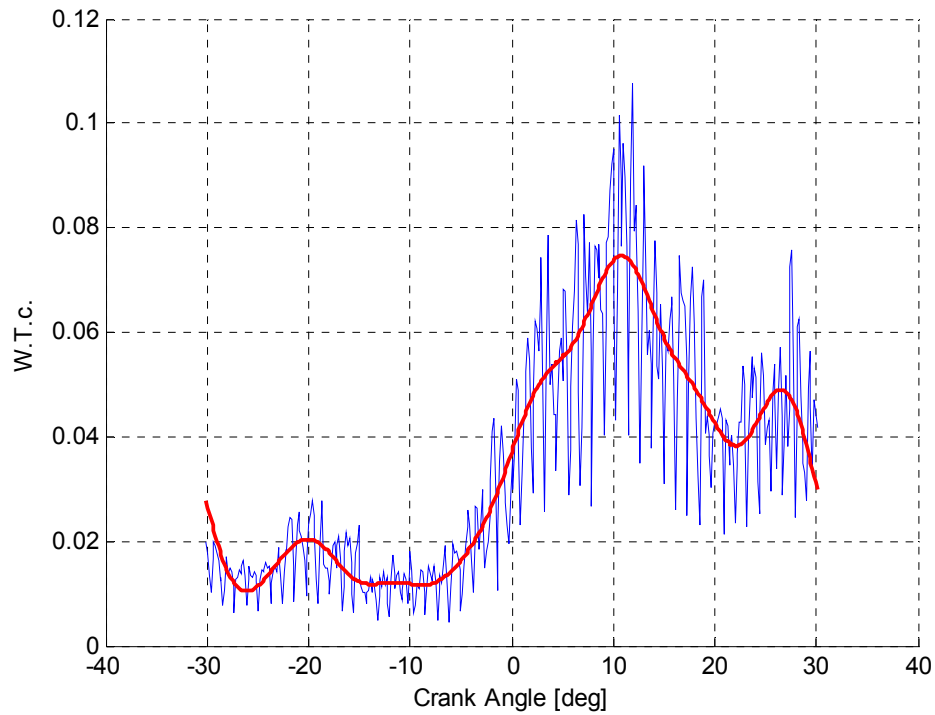


Fig. 6.34

Dettaglio PMlv Prova vettore accelerazione direzione z 2500rpm - Torque500Nm - Power 45kW
Cilindri I Scala 3 Periodi 50 A8

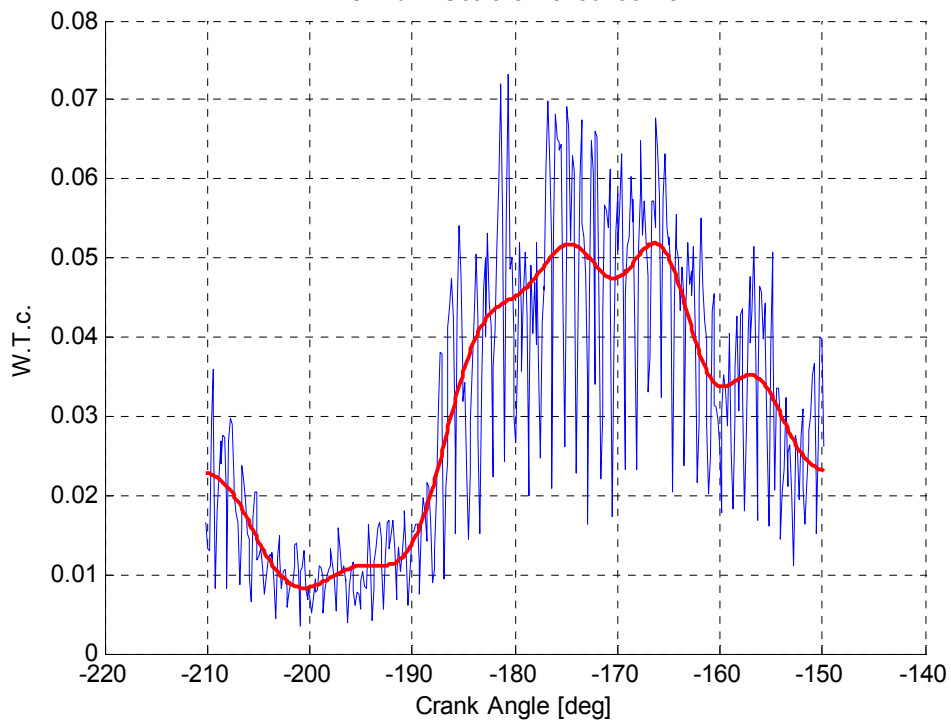


Fig. 6.35

La Fig. 6.36 riporta il segnale accelerometrico, in termini di coefficienti wavelet in funzione di tutti i valori del crank angle, per 50 cicli compiuti in sequenza dalla coppia di cilindri II (4-2).

In Fig. 6.36 si notano due picchi che rappresentano le detonazioni nei cilindri 4-2. Il picco a sinistra fra $-210^\circ \div -150^\circ$ corrisponde alla combustione nel cilindro che convenzionalmente è indicato con 2 (vedi Fig. 6.1), il picco a destra fra $-30^\circ \div +30^\circ$ corrisponde alla combustione nel cilindro che è indicato convenzionalmente con 4 (vedi Fig. 6.1). La curva rossa è la ricostruzione del segnale accelerometrico scomposto a mezzo Wavelet e mediato geometricamente 50 volte, ottenuta con le prime 40 armoniche. La Fig. 6.36 si riferisce all'intervallo di tempo $1 \div 150000 \text{ u.d.t.}$

In Fig. 6.37 e Fig. 6.38 è mostrato un dettaglio dell'andamento della PMI vibrazionale, ottenuta con 8 armoniche mediate 50 volte, per valori di crank angle compresi fra $-30^\circ \div +30^\circ$ (Fig. 6.37) e fra $-210^\circ \div -150^\circ$ (Fig. 6.38).

L'intervallo di tempo cui si riferiscono è, ovviamente, così come per la Fig. 6.36 compreso fra $1 \div 150000 \text{ u.d.t.}$

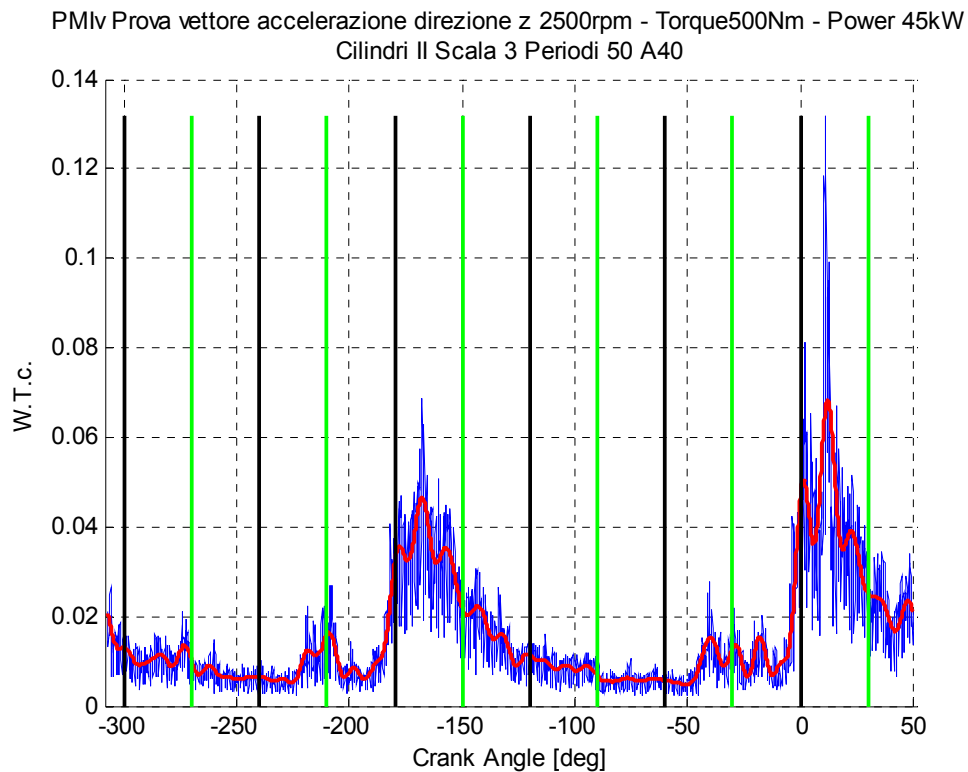


Fig. 6.36

Dettaglio PMlv Prova vettore accelerazione direzione z 2500rpm - Torque500Nm - Power 45kW
Cilindri II Scala 3 Periodi 50 A8

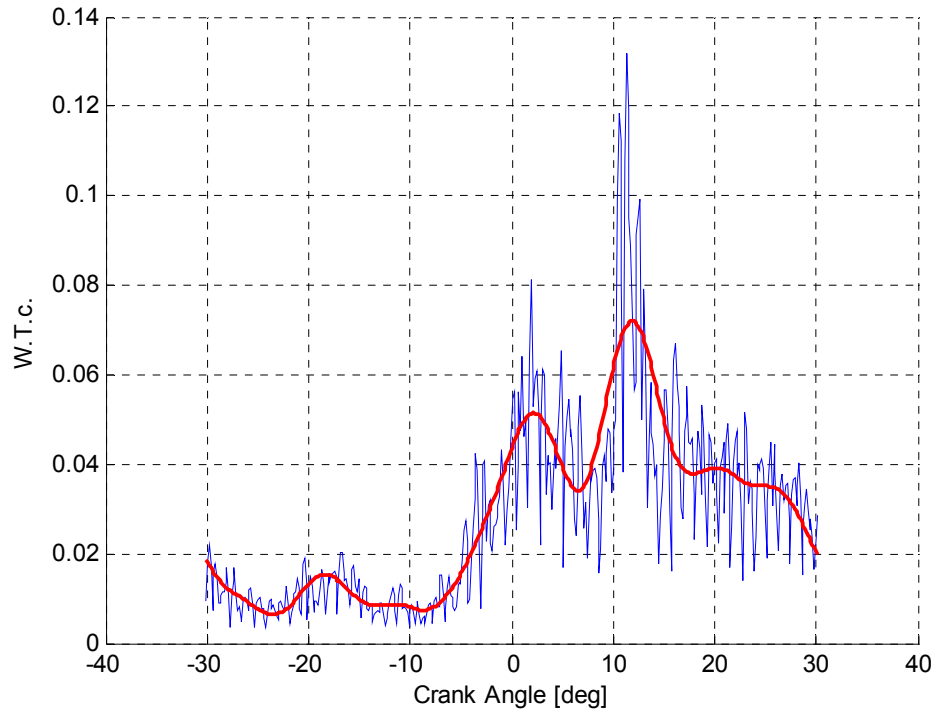


Fig. 6.37

Dettaglio PMlv Prova vettore accelerazione 2500rpm - Torque500Nm - Power 45kW
Cilindri II Scala 3 Periodi 50 A8

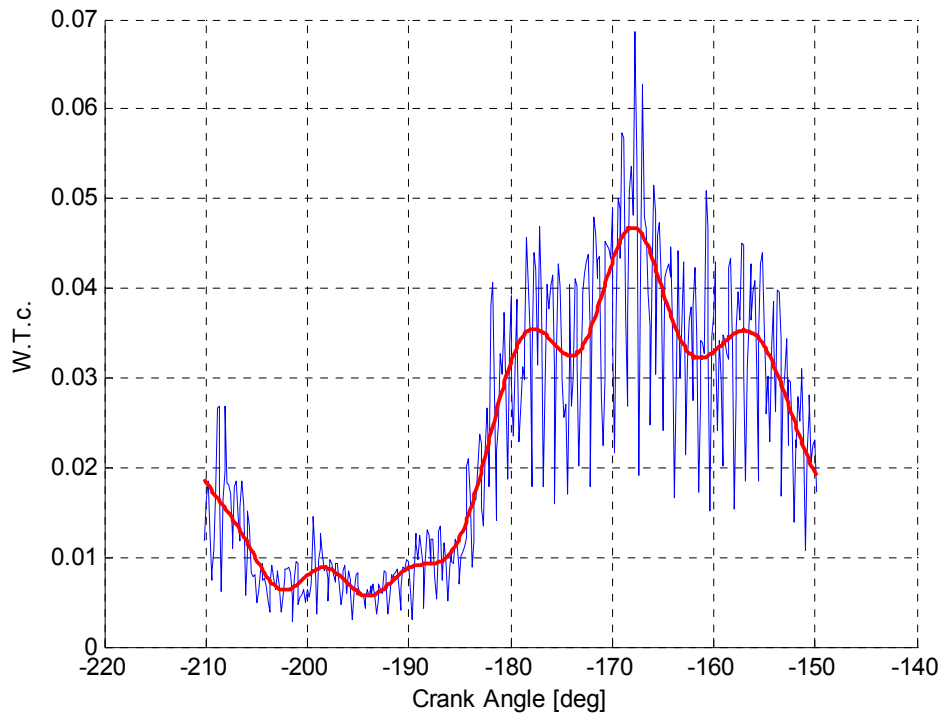


Fig. 6.38

Le considerazioni fatte relativamente alle Fig. 6.33, Fig. 6.34 e Fig. 6.35 sono integralmente ripetibili per le Fig. 6.39, Fig. 6.40 e Fig. 6.41, con la sola differenza che l'intervallo di tempo cui esse fanno riferimento è compreso fra 300001÷450000u.d.t.

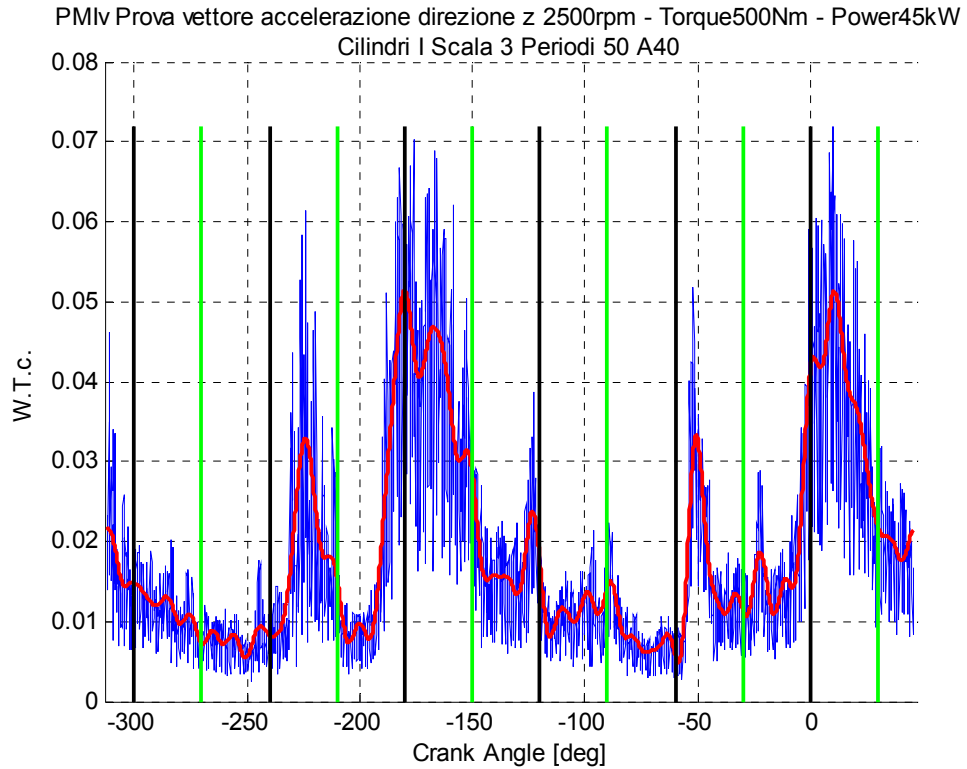


Fig. 6.39

Dettaglio PMlv Prova vettore accelerazione direzione z 2500rpm - Torque500Nm - Power45kW
Cilindri I Scala 3 Periodi 50 A8

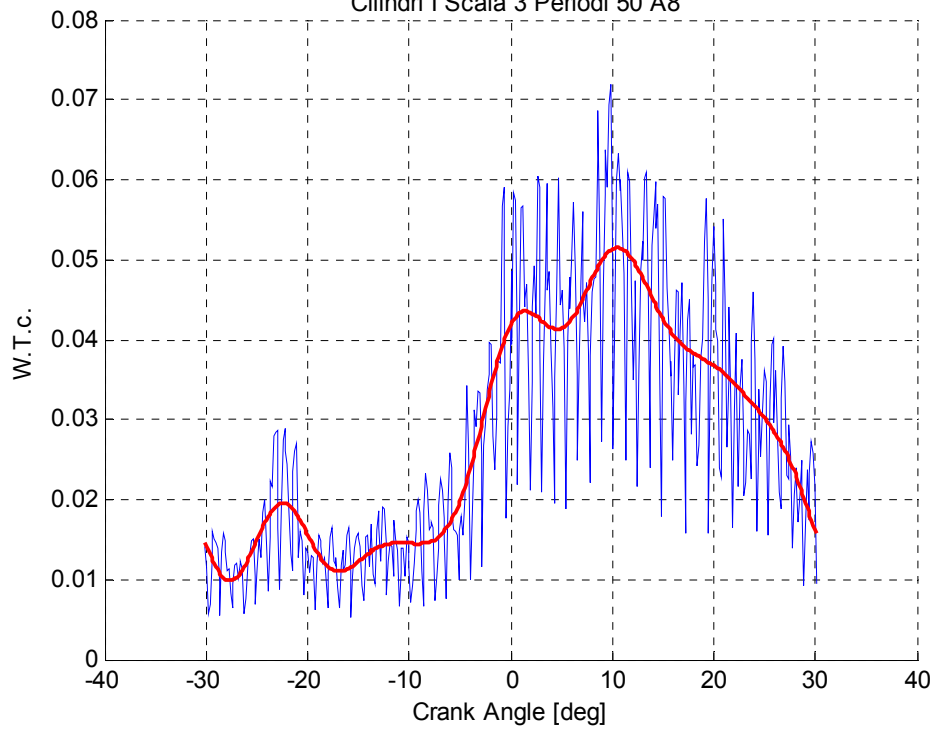


Fig. 6.40

Dettaglio PMlv Prova vettore accelerazione direzione z 2500rpm - Torque500Nm - Power45kW
Cilindri I Scala 3 Periodi 50 A8

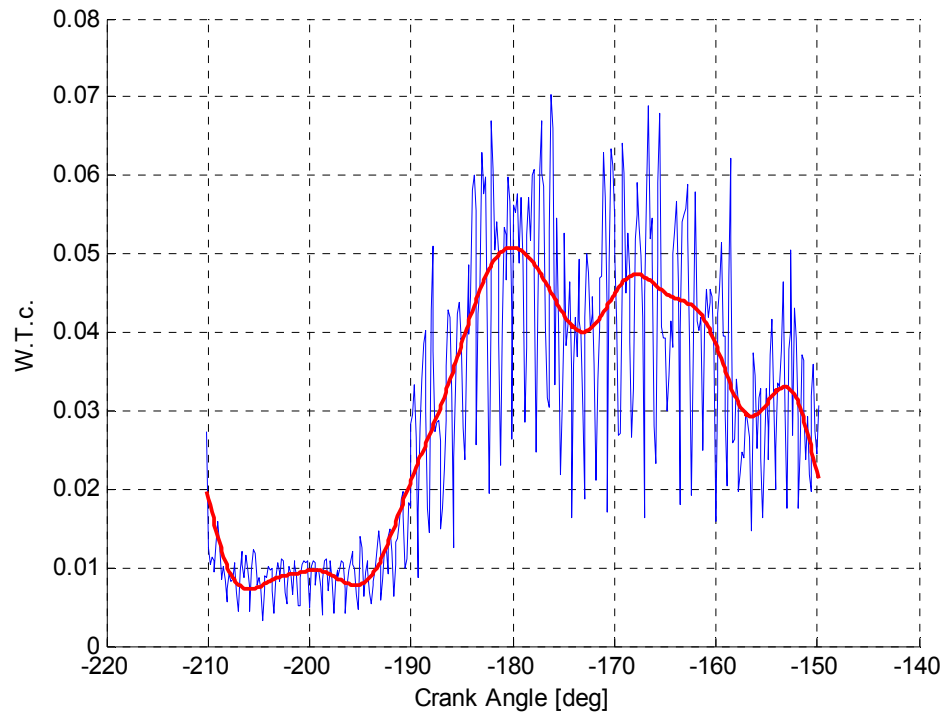


Fig. 6.41

Le considerazioni fatte relativamente alle Fig. 6.36, Fig. 6.37 e Fig. 6.38 sono integralmente ripetibili per le Fig. 6.42, Fig. 6.43 e Fig. 6.44 con la sola differenza che l'intervallo di tempo cui esse fanno riferimento è compreso fra 150001÷300000u.d.t.

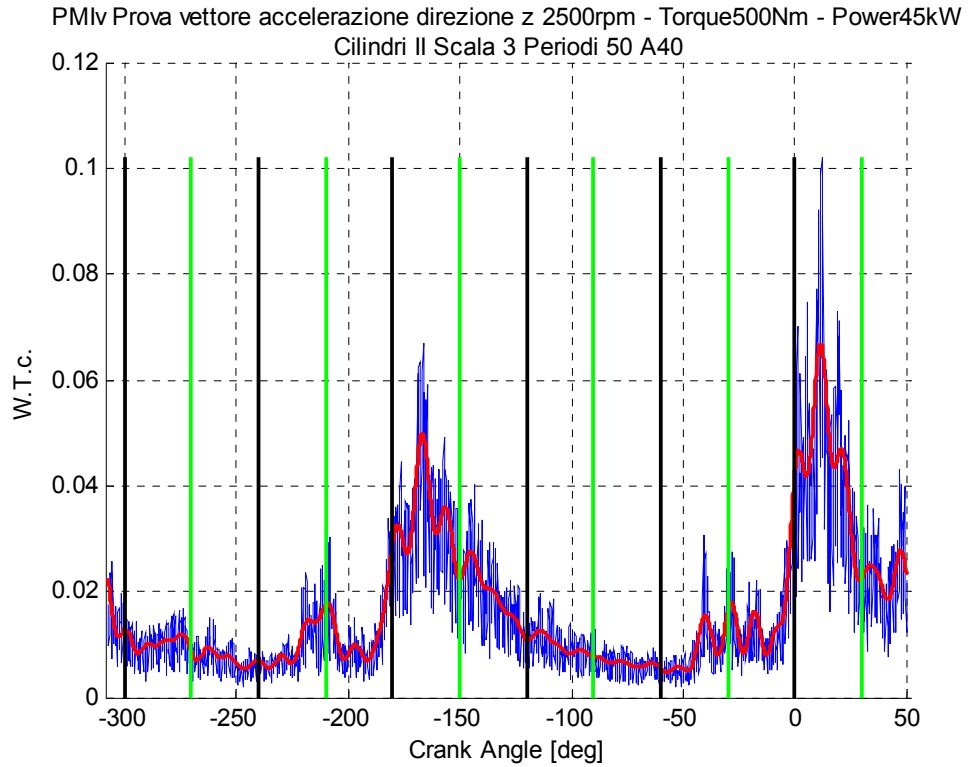


Fig. 6.42

Dettaglio PMlv Prova vettore accelerazione direzione z 2500rpm - Torque500Nm - Power45kW
Cilindri II Scala 3 Periodi 50 A8

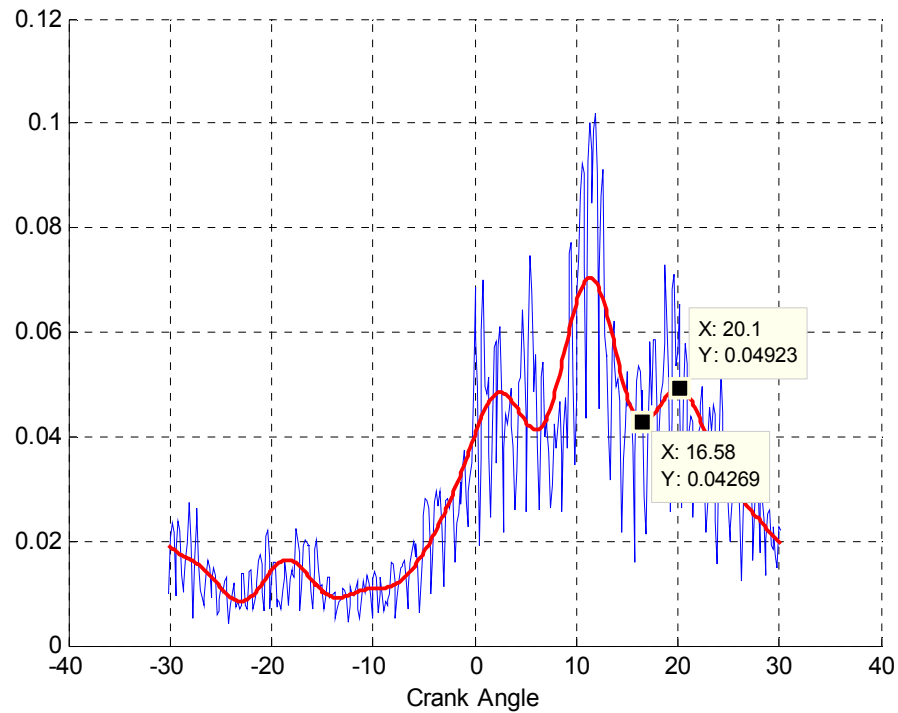


Fig. 6.43

Dettaglio PMlv Prova vettore accelerazione direzione z 2500rpm - Torque500Nm - Power45kW
Cilindri II Scala 3 Periodi 50 A8

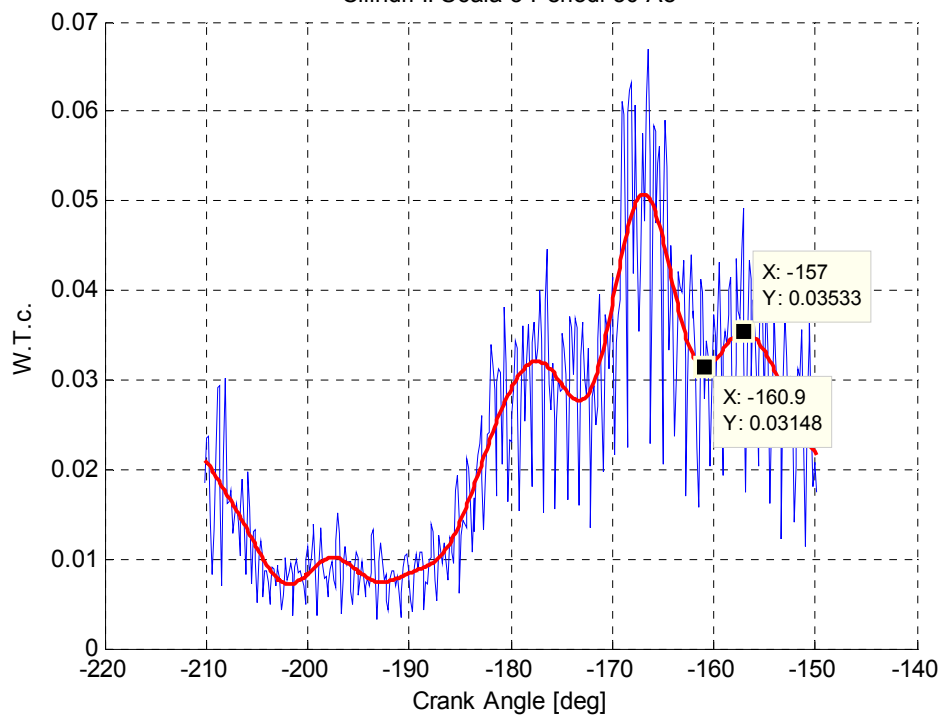


Fig. 6.44

Per completezza si riporta nelle successive figure, Fig. 6.45 ÷ Fig. 6.68, l'andamento della PIV (pressione istantanea vibrazionale), vale a dire non mediata geometricamente, relativa ai cilindri I ed ai cilindri II, in corrispondenza dei periodi 1, 2, 3, 4. Per ciascuna immagine si hanno sull'asse delle ordinate i coefficienti wavelet (adimensionali) e sull'asse delle ascisse i valori del crank angle.

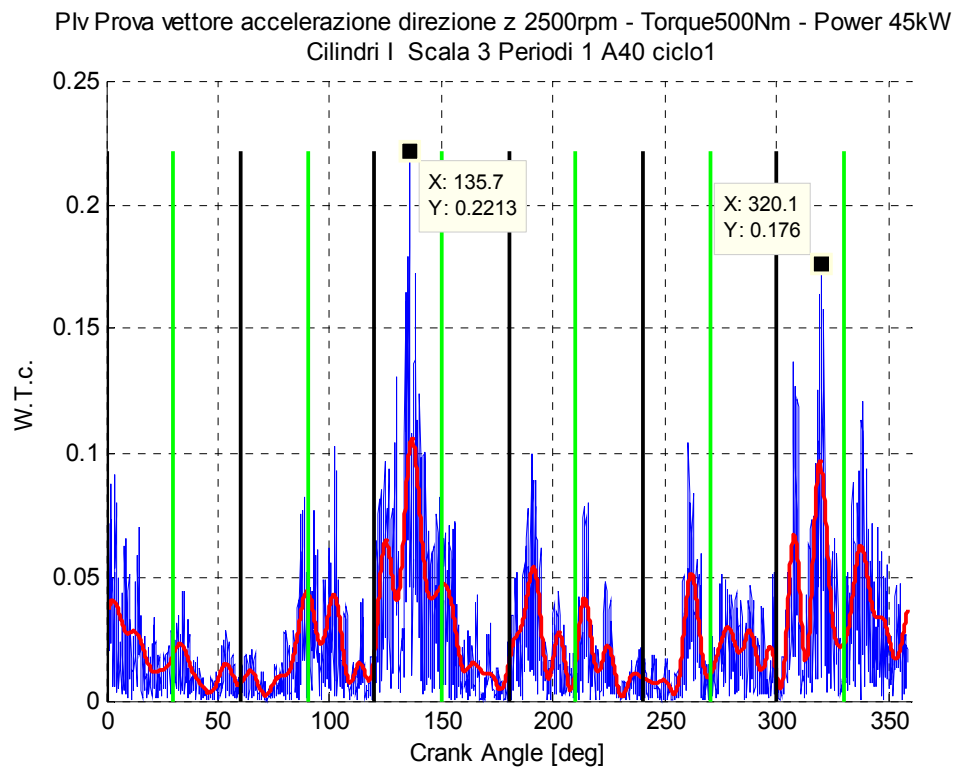


Fig. 6.45

Dettaglio Plv Prova vettore accelerazione direzione z 2500rpm - Torque500Nm - Power 45kW
Cilindri I Scala 3 Periodi 1 A40 ciclo1

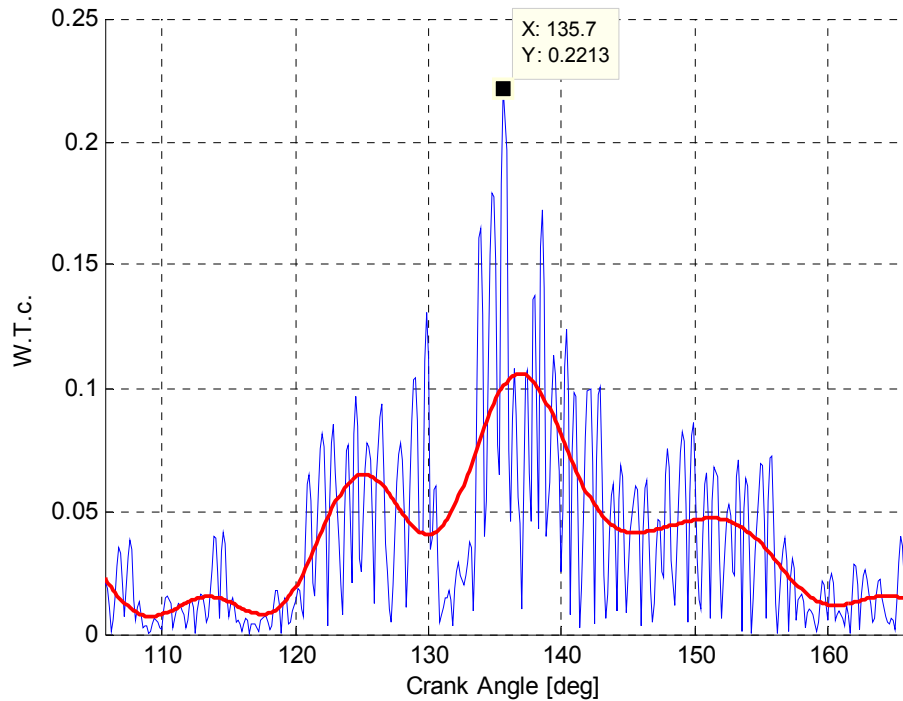


Fig. 6.46

Dettaglio Plv Prova vettore accelerazione direzione z 2500rpm - Torque500Nm - Power 45kW
Cilindri I Scala 3 Periodi 1 A40 ciclo1

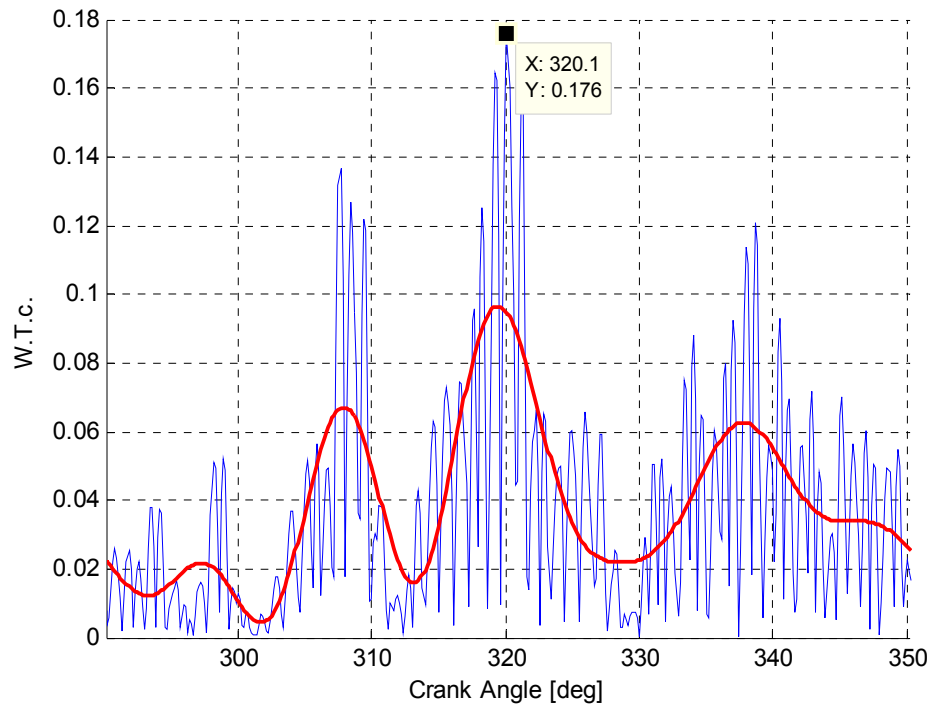


Fig. 6.47

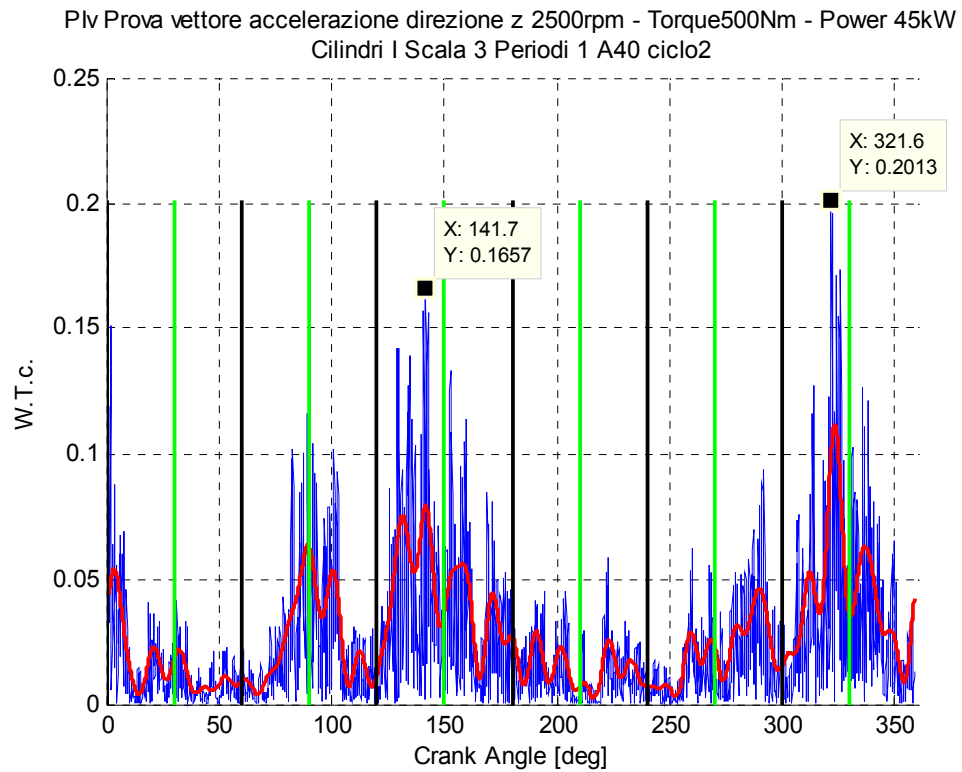


Fig. 6.48

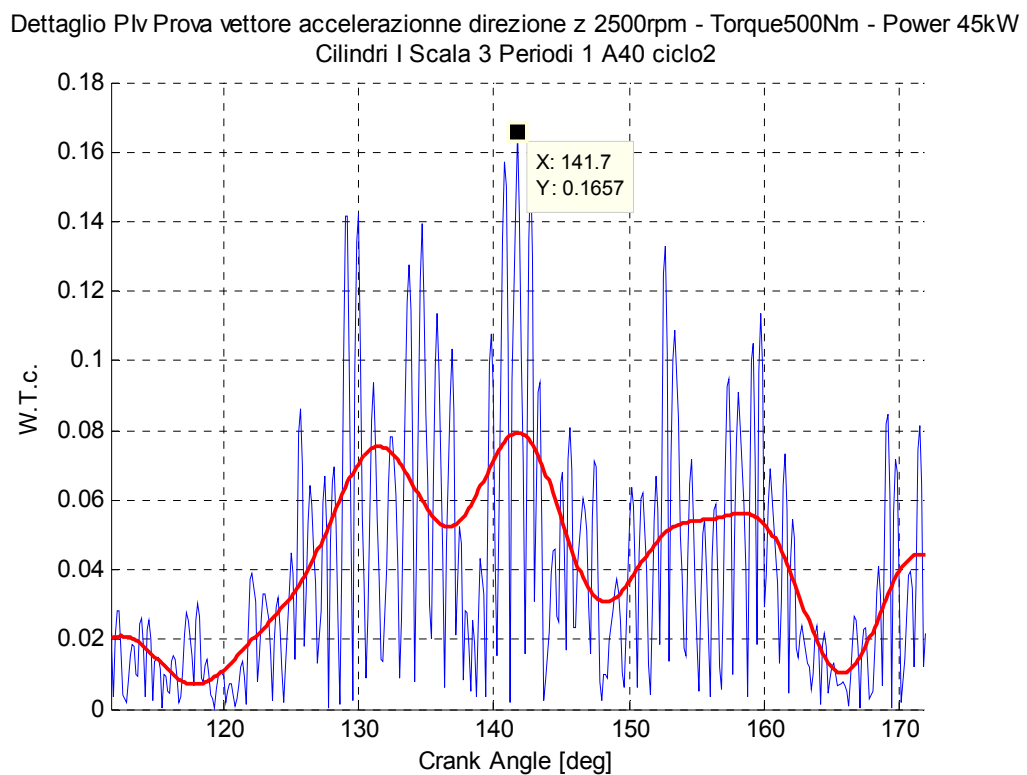


Fig. 6.49

Dettaglio Plv Prova vettore accelerazione direzione z 2500rpm - Torque500Nm - Power 45kW
Cilindri I Scala 3 Periodi 1 A40 ciclo2

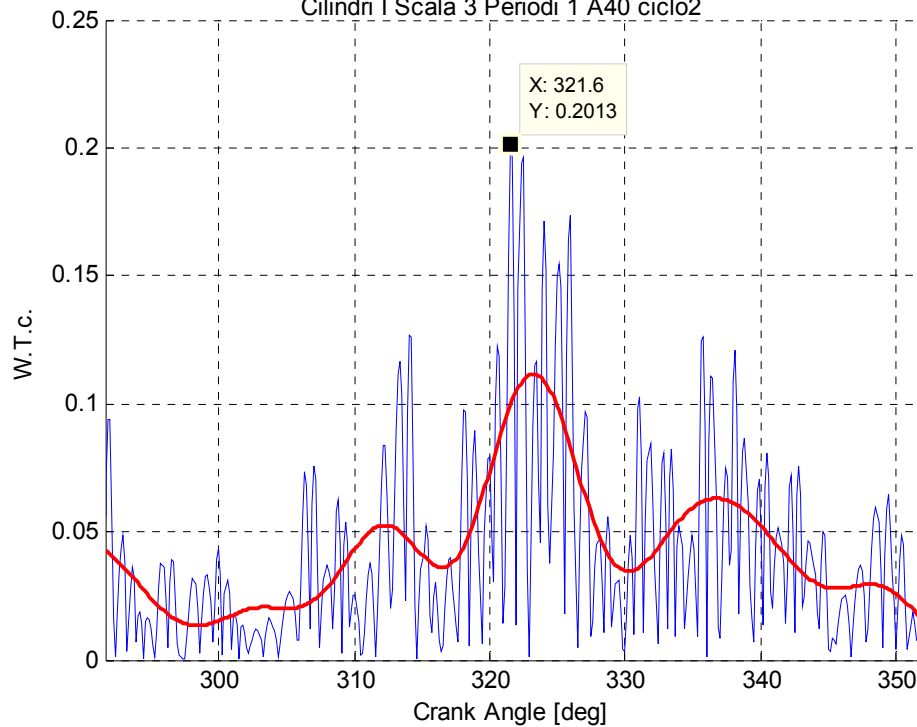


Fig. 6.50

Plv Prova vettore accelerazione dispari z 2500rpm - Torque500Nm - Power 45kW
Cilindri I Scala 3 Periodi 1 A40 ciclo 3

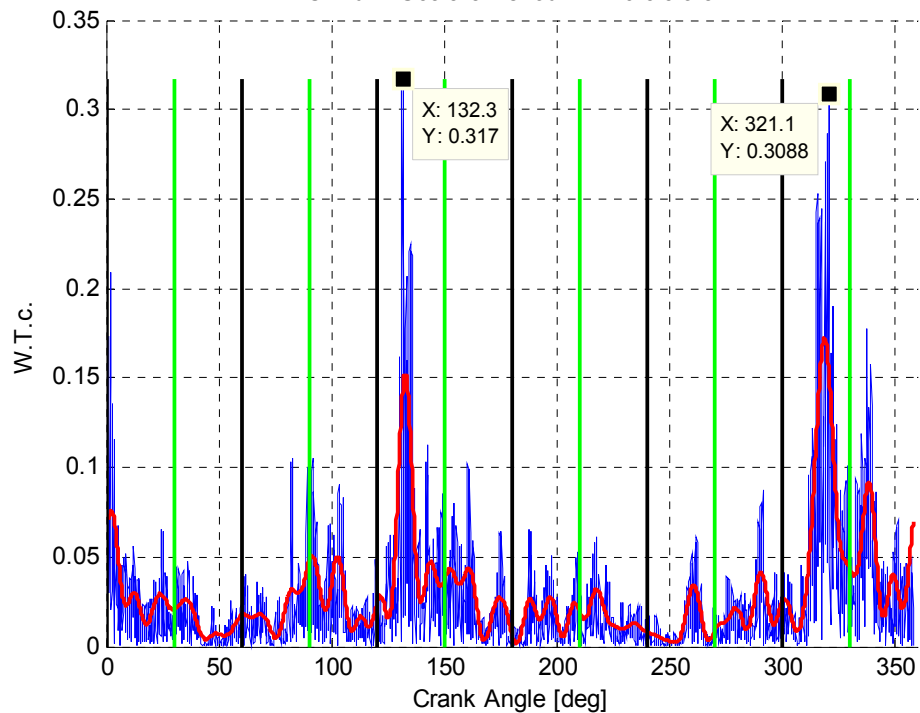


Fig. 6.51

Dettaglio Plv Prova vettore accelerazione dispari z 2500rpm - Torque500Nm - Power 45kW
Cilindri I Scala 3 Periodi 1 A40 ciclo 3

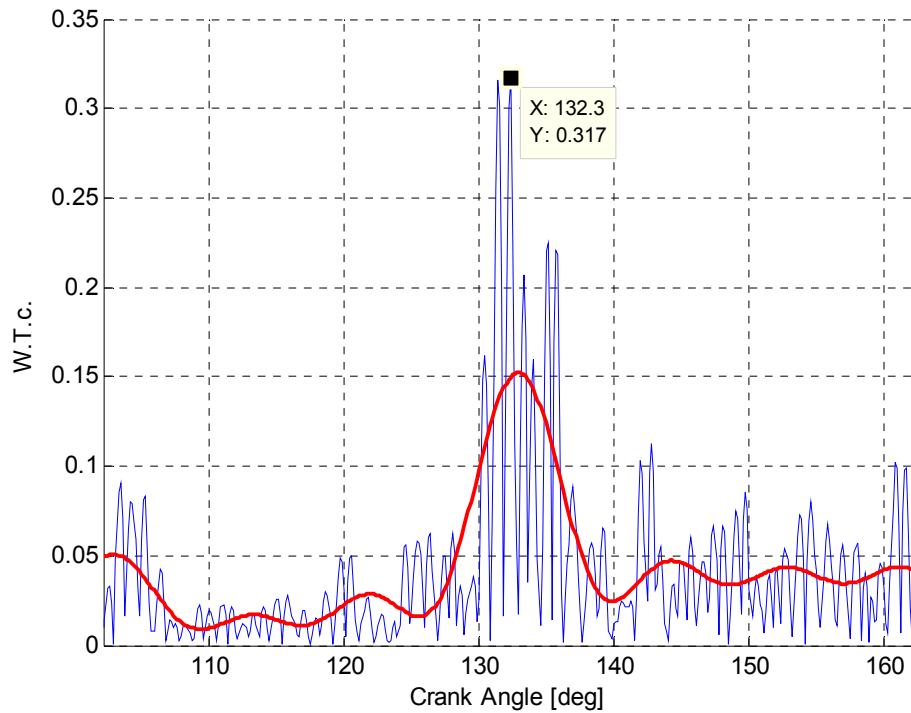


Fig. 6.52

Dettaglio Plv Prova vettore accelerazione dispari z 2500rpm - Torque500Nm - Power 45kW
Cilindri I Scala 3 Periodi 1 A40 ciclo 3

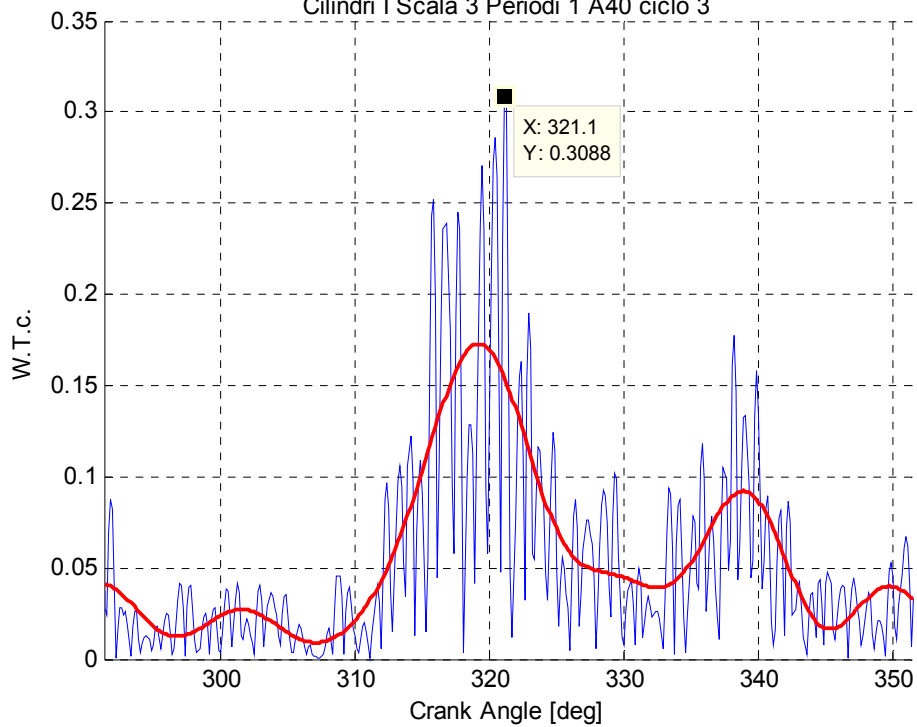


Fig. 6.53

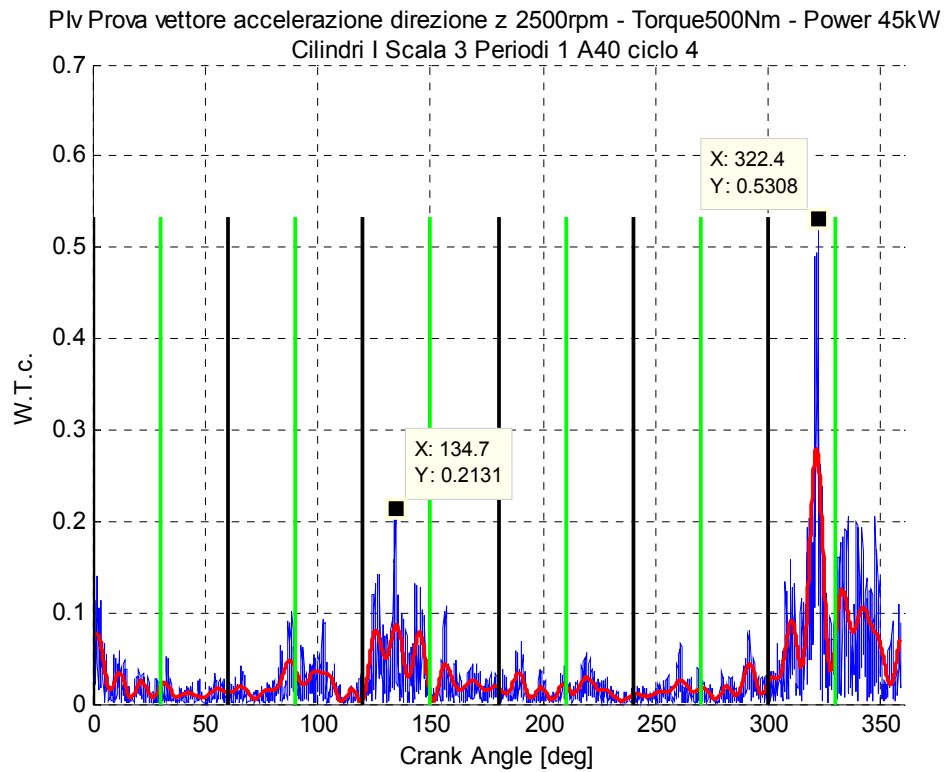


Fig. 6.54

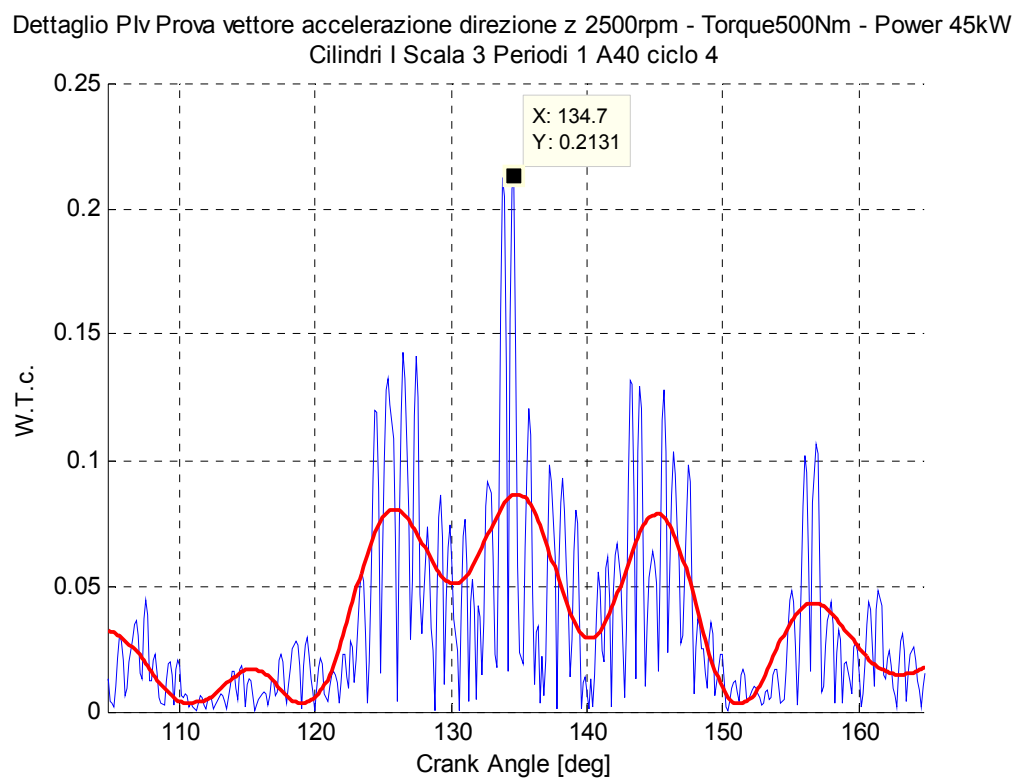


Fig. 6.55

Dettaglio Plv Prova vettore accelerazione direzione z 2500rpm - Torque500Nm - Power 45kW
Cilindri I Scala 3 Periodi 1 A40 ciclo 4

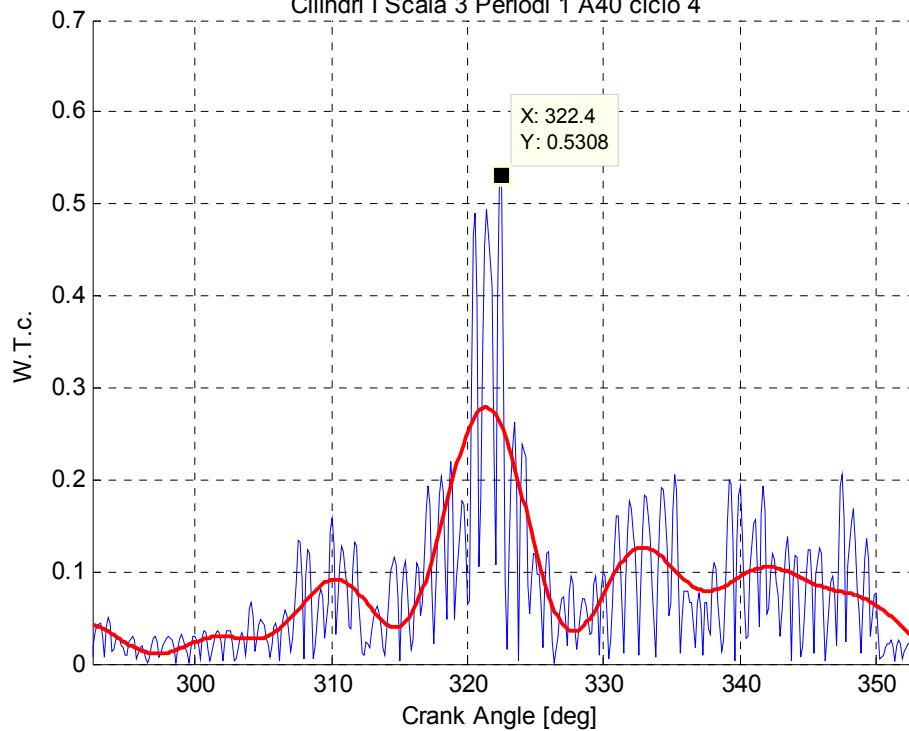


Fig. 6.56

Plv Prova vettore accelerazione direzione z 2500rpm - Torque500Nm - Power 45kW
Cilindri II Scala 3 Periodi 1 A40 ciclo1

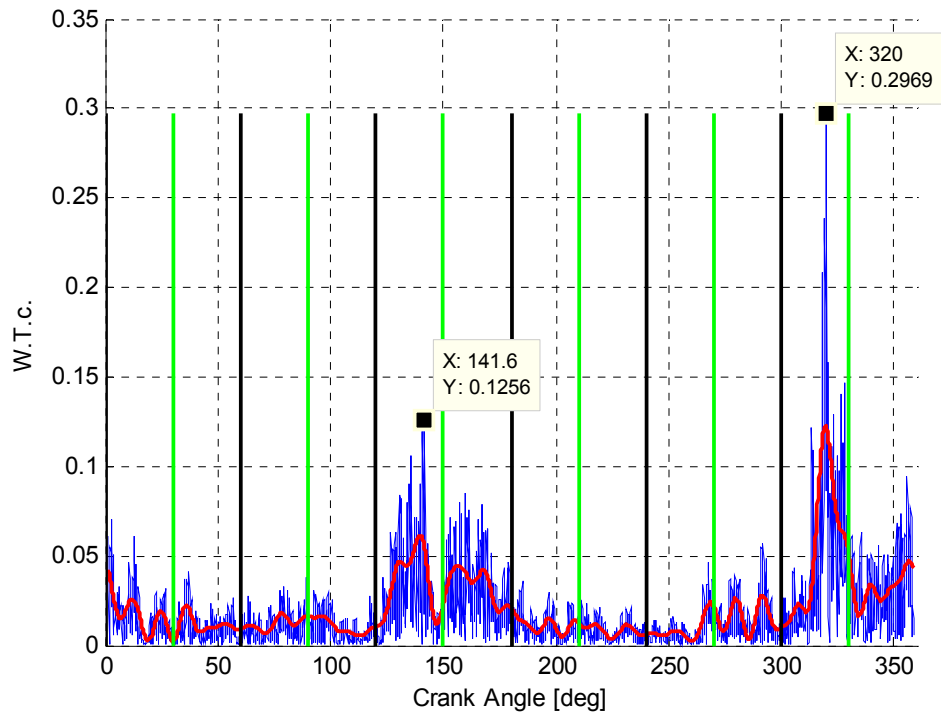


Fig. 6.57

Dettaglio PIV Prova vettore accelerazione direzione z 2500rpm - Torque500Nm - Power 45kW
Cilindri II Scala 3 Periodi 1 A40 ciclo1

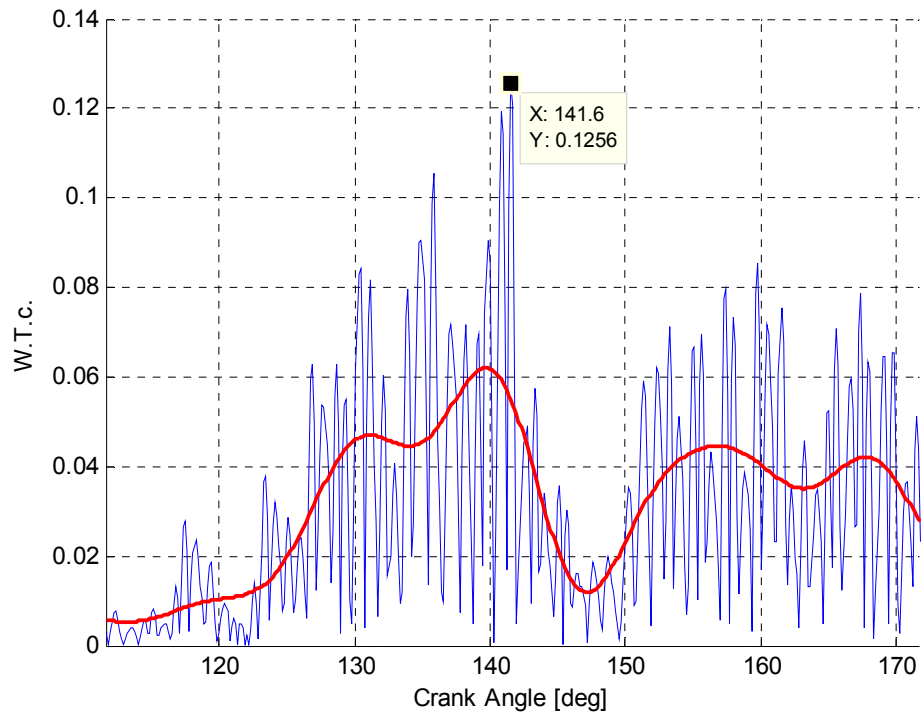


Fig. 6.58

Dettaglio PIV Prova vettore accelerazione direzione z 2500rpm - Torque500Nm - Power 45kW
Cilindri II Scala 3 Periodi 1 A40 ciclo1

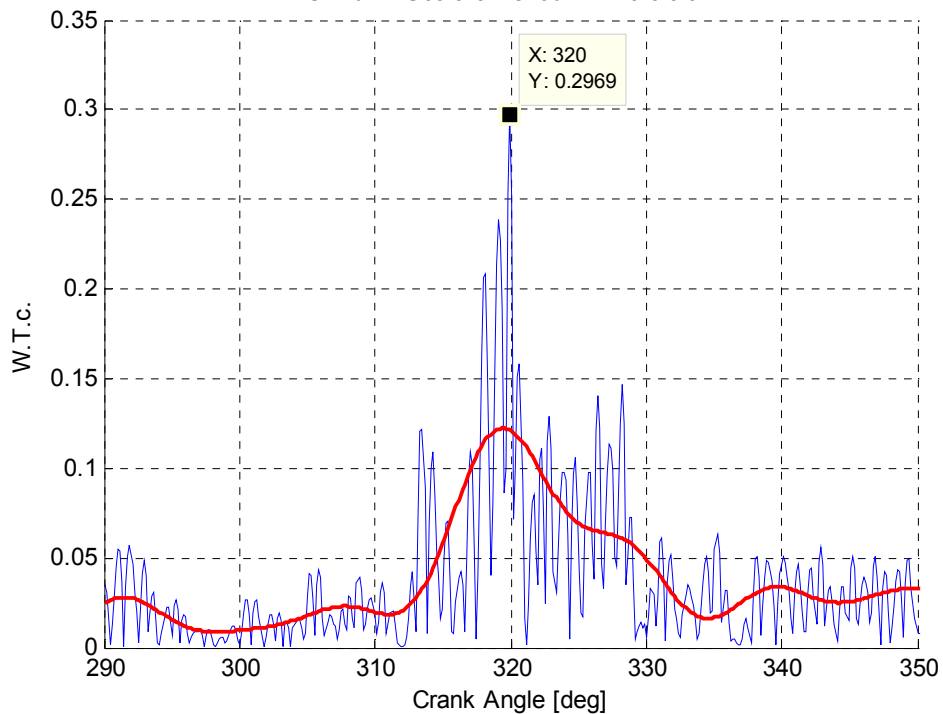


Fig. 6.59

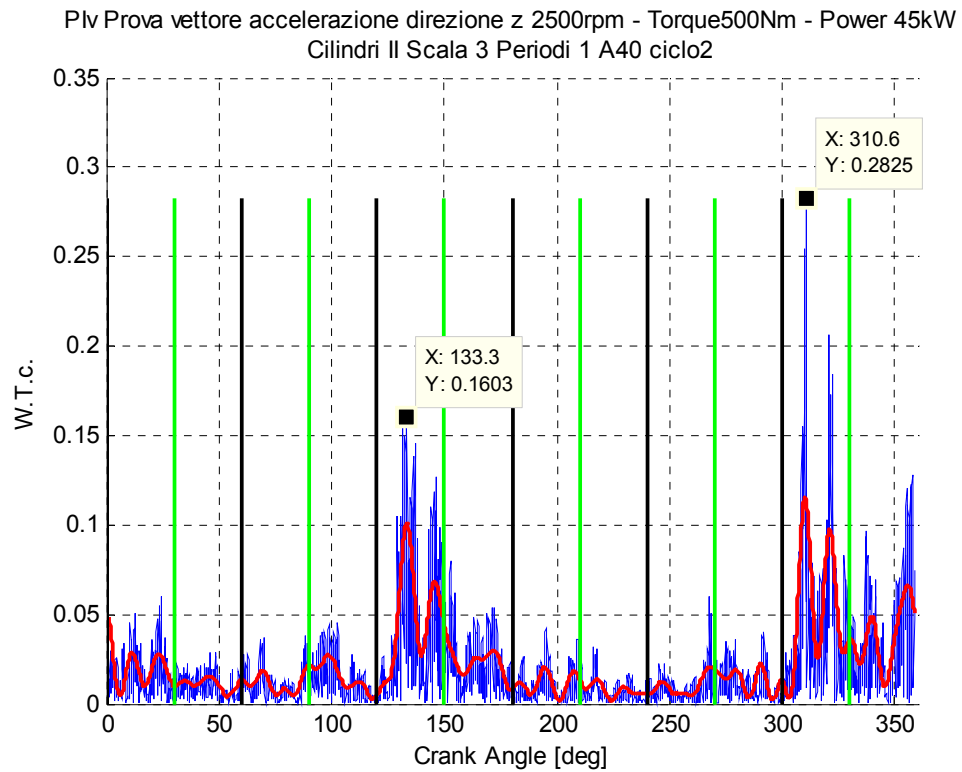


Fig. 6.60

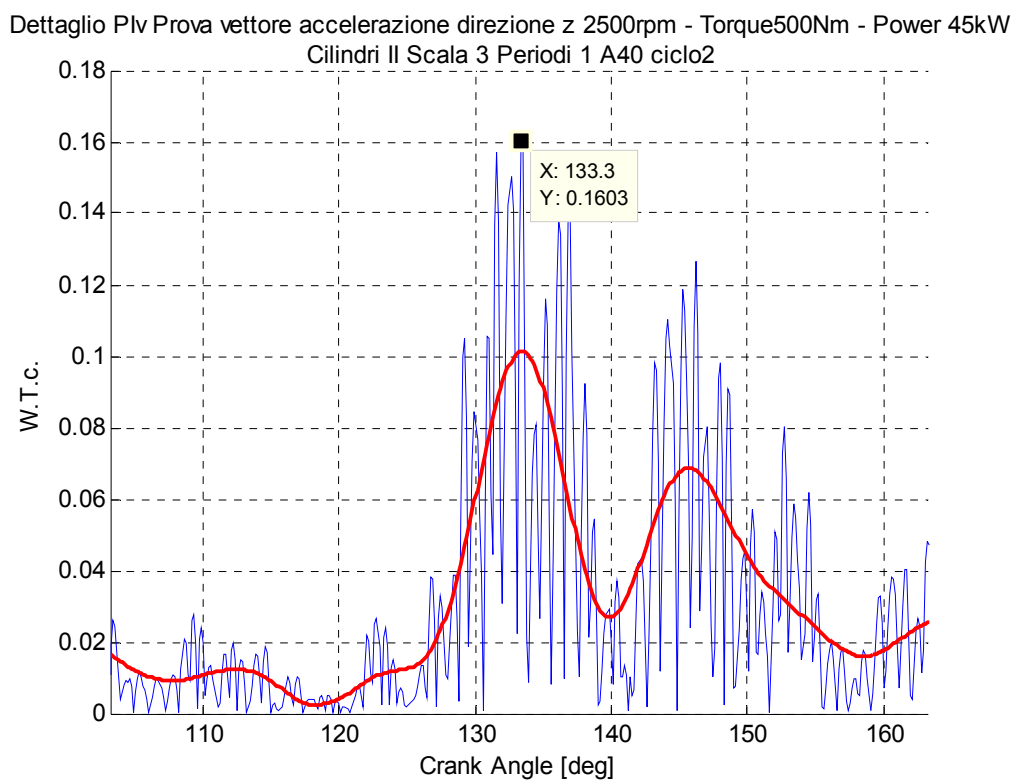


Fig. 6.61

Dettaglio PIV Prova vettore accelerazione direzione z 2500rpm - Torque500Nm - Power 45kW
Cilindri II Scala 3 Periodi 1 A40 ciclo2

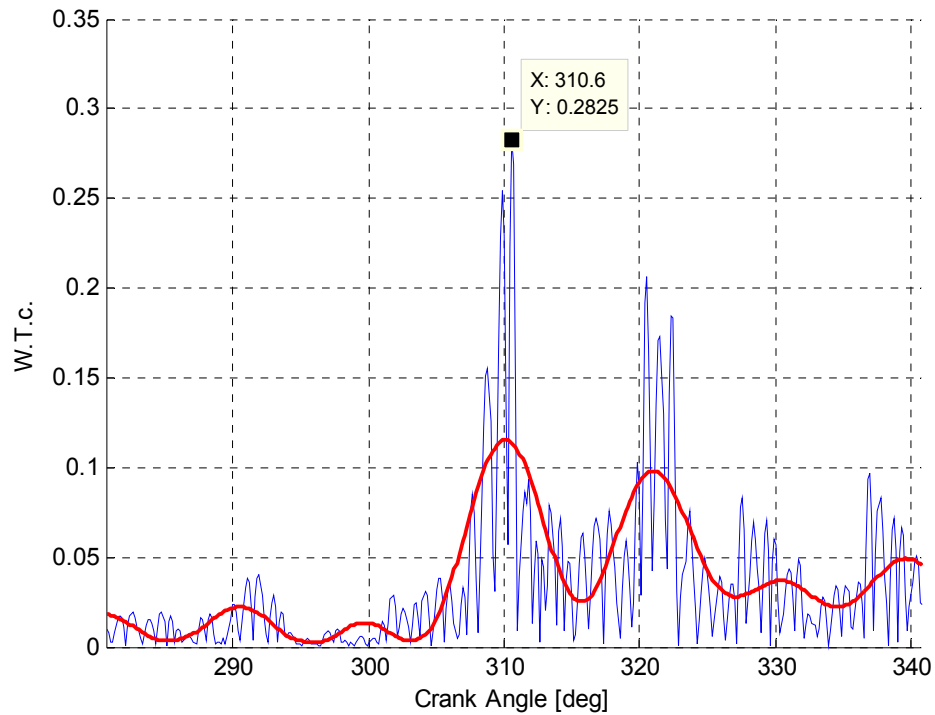


Fig. 6.62

PIV Prova vettore accelerazione direzione z 2500rpm - Torque500Nm - Power 45kW
Cilindri II Scala 3 Periodi 1 A40 ciclo3

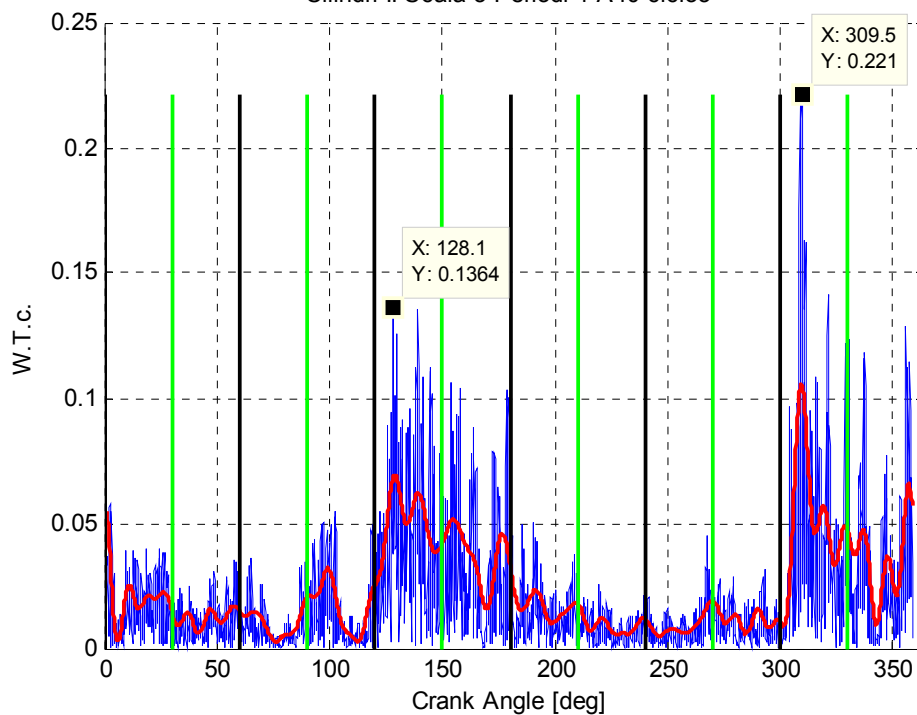


Fig. 6.63

Dettaglio PIV Prova vettore accelerazione direzione z 2500rpm - Torque500Nm - Power 45kW
Cilindri II Scala 3 Periodi 1 A40 ciclo3

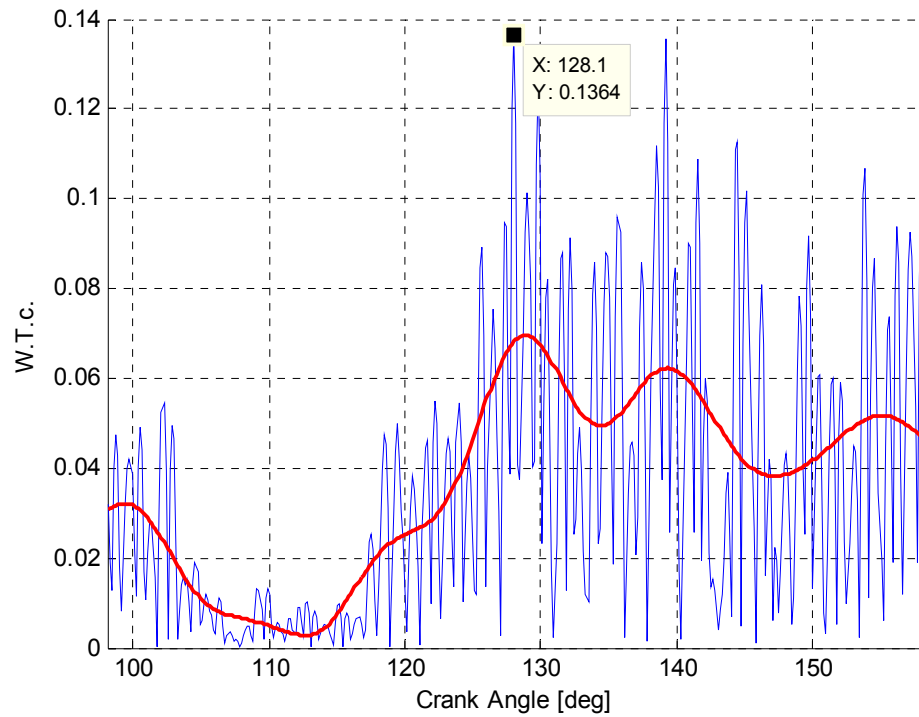


Fig. 6.64

Dettaglio PIV Prova vettore accelerazione direzione z 2500rpm - Torque500Nm - Power 45kW
Cilindri II Scala 3 Periodi 1 A40 ciclo3

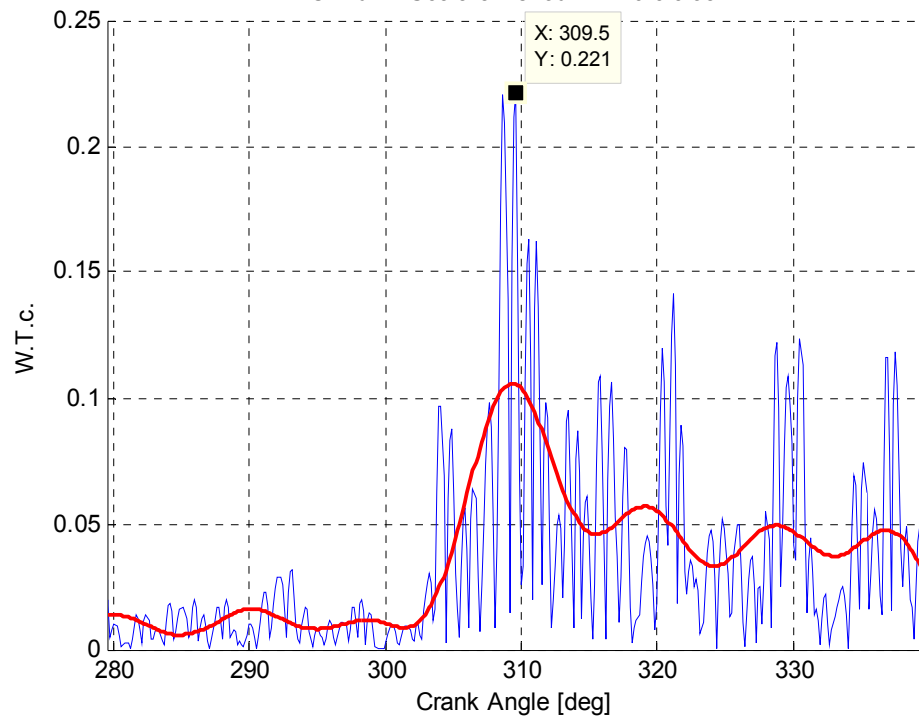


Fig. 6.65

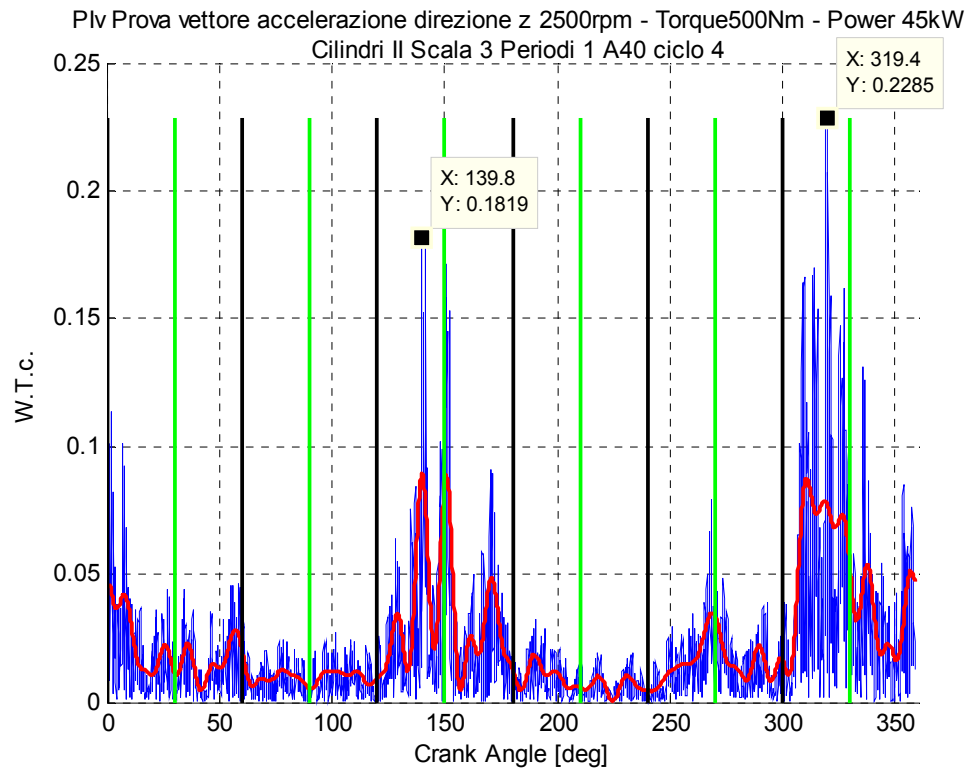


Fig. 6.66

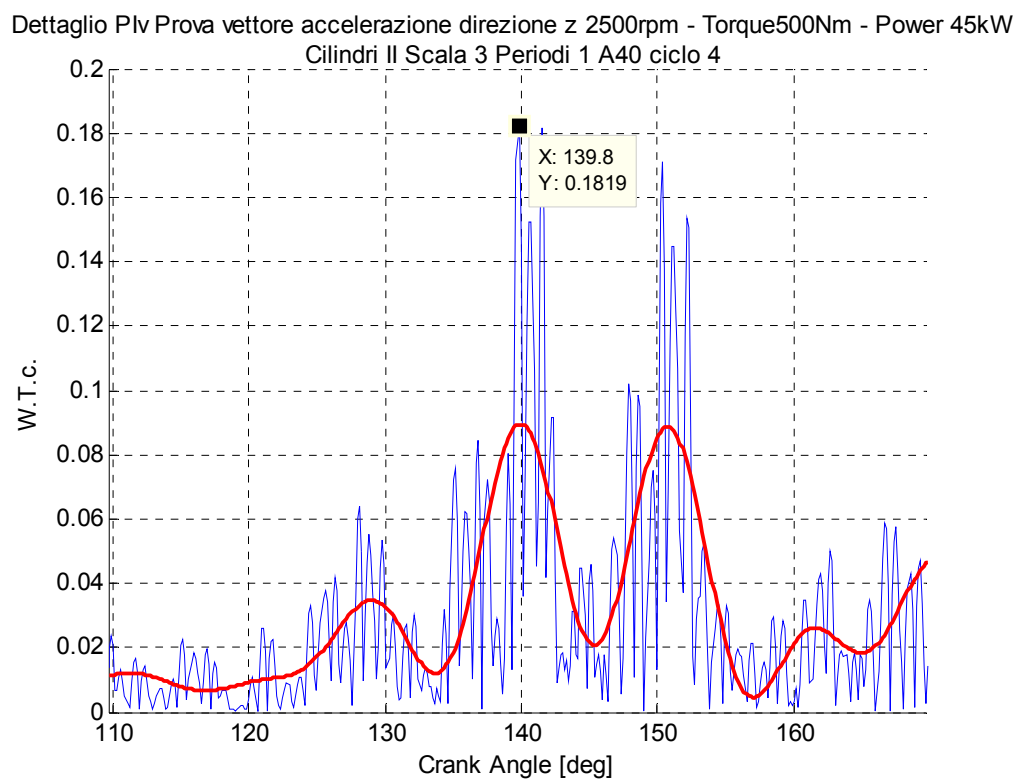


Fig. 6.67

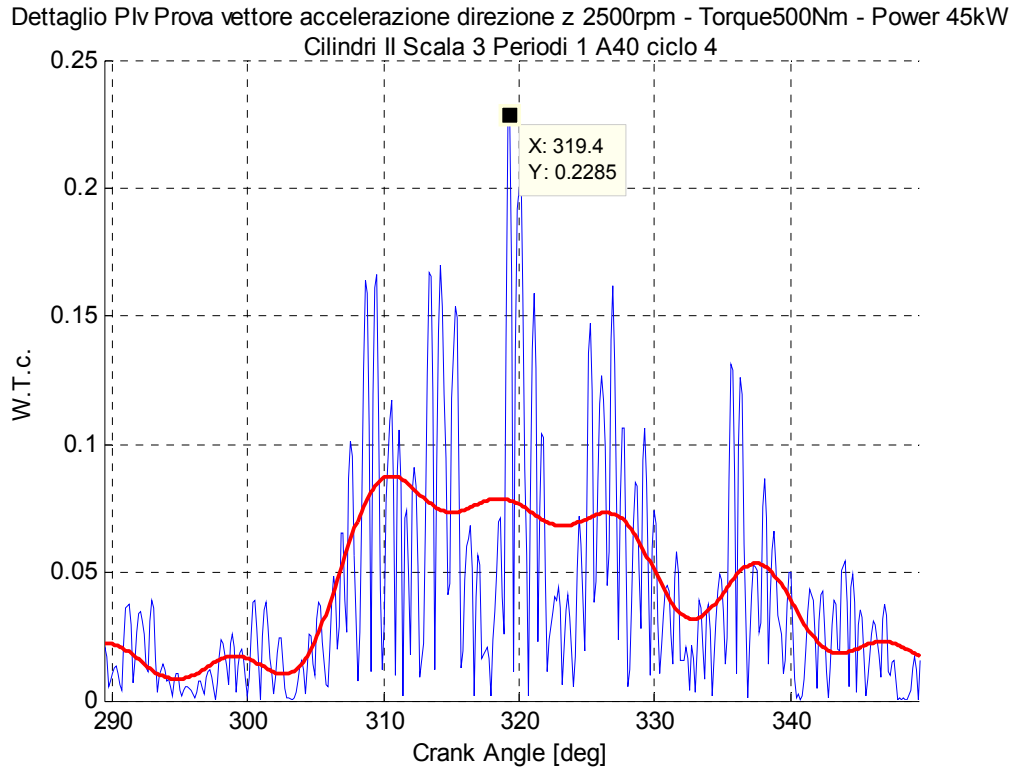


Fig. 6.68

6.5 PMIv per motori a c.i. per compressione e ad accensione comandata

In questo paragrafo, si riportano alcuni risultati, per quanto concerne lo studio di un motore benzina monocilindrico (v. Appendice F).

Preliminarmente in Fig. 6.68bis è illustrato l'andamento vibrazionale relativo a due cicli consecutivi. Essi sono stati estratti facendo riferimento al segnale tachimetrico di cui è provvisto il motore.

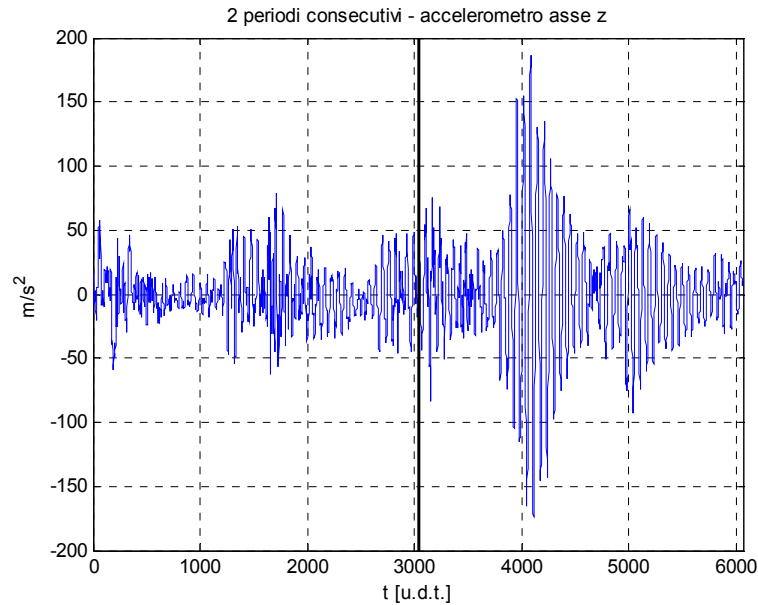


Fig. 6.68bis

In Fig. 6.69, si riporta il diagramma dei coefficienti wavelet di dettaglio istantanei relativi al ciclo in cui si registra la fase di combustione (blu). La ricostruzione vibrazionale riferita a tale intero ciclo termodinamico è riportata nella stessa figura evidenziata con la linea rossa. In Fig. 6.70 è riportato un confronto tra la PI rilevata con candela strumentata (a) e la ricostruzione della PIV vibrazionale (b) (eseguita con i coefficienti wavelet riportati in Fig. 6.69). La Fig. 6.70 bene evidenzia la bontà della ricostruzione della PIV vibrazionale in termini puramente qualitativi. Come è noto nei motori ad accensione comandata, la combustione è innescata dalla scintilla emessa dagli elettrodi di una candela di accensione. La rapida combustione che avviene per tali motori, si riscontra bene nel diagramma della pressione istantanea di Fig. 6.70.

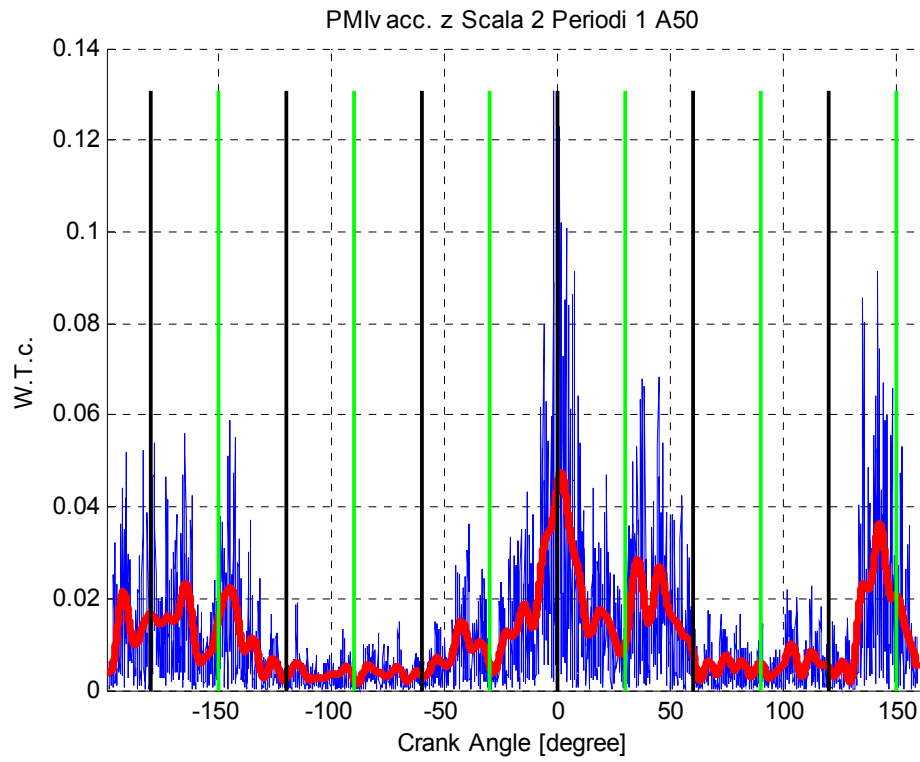


Fig. 6.69

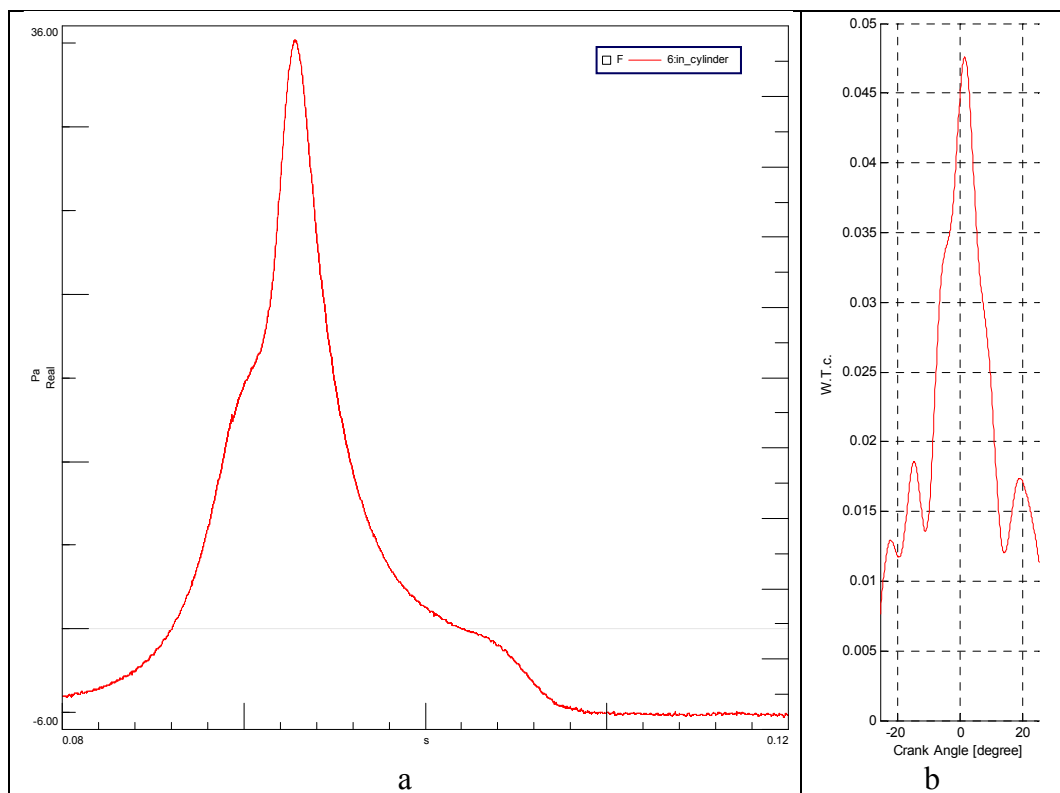


Fig. 6.70

Diverso è il caso dei motori diesel; il confronto tra i suddetti diagrammi è presentato nelle Fig. 6.71 e Fig. 6.72. La Fig. 6.71 riporta il diagramma di pressione istantanea rilevato a mezzo candela strumentata. In Fig. 6.72 è riportata la ricostruzione della PIV vibrazionale a partire dai coefficienti wavelet elaborati dal corrispondente segnale accelerometrico.

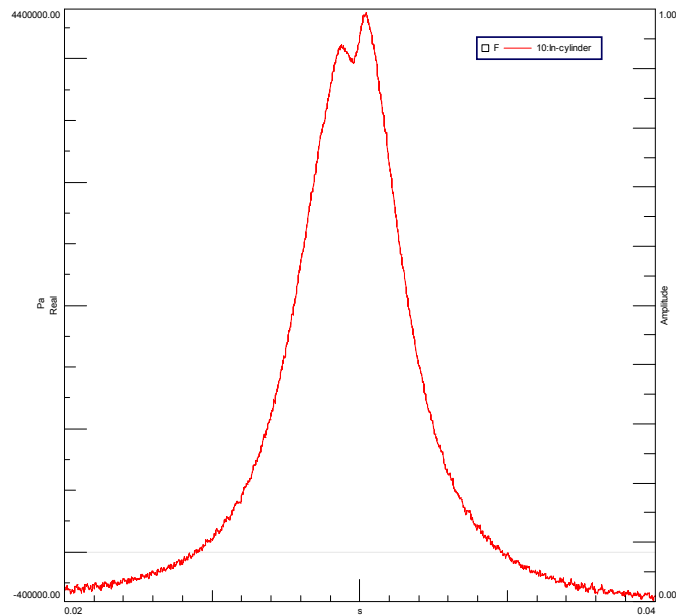


Fig. 6.71

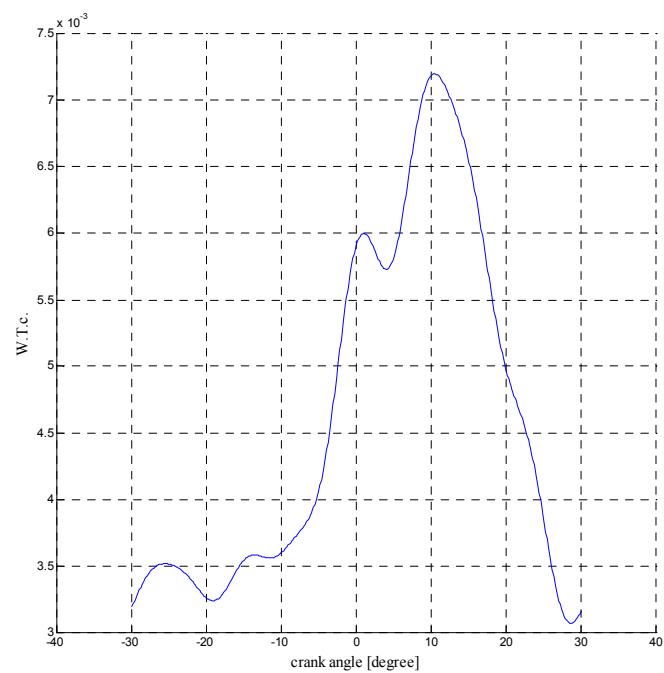


Fig. 6.72

Infine, si riporta un dettaglio quantitativo per quanto concerne sia la ricostruzione della PIV vibrazionale effettuata sui segnali accelerometrici rilevati sul motore benzina che sui segnali accelerometrici rilevati su motore diesel.

In particolare, con riferimento alla Fig. 6.70(a) inerente la curva di pressione rilevata a mezzo candela strumentata sul motore benzina, si osserva che dal primo flesso della curva al picco di pressione intercorrono circa 2.7×10^{-3} s. Invece, con riferimento alla Fig. 6.70(b), dov'è illustrata la ricostruzione della PIV vibrazionale, il tempo che intercorre dal primo flesso al picco è pari a circa 3.3×10^{-4} s.

Per quanto concerne i risultati ottenuti sul motore diesel facciamo riferimento alla Fig. 6.71 ed alla Fig. 6.72. Nella Fig. 6.71 è riportata la curva della pressione istantanea rilevata sul motore diesel. L'intervallo di tempo che intercorre tra i due picchi è di circa 6.1×10^{-4} s. In Fig. 6.72, dov'è riportata la ricostruzione della PMI vibrazionale, questa volta per il motore diesel, il tempo che intercorre tra i due picchi è pari a circa 8.6×10^{-4} s.

6.6 Discussione

Con riferimento a quanto fin qui descritto e all'Appendice D si riportano alcune considerazioni e commenti in merito ai risultati ottenuti.

6.6.1 Morfodinamica vibrazionale

Valutazioni di carattere inerziale, dedotte dall'osservazione della dinamica osservabile attraverso le evoluzioni compiute dallo spot laser, confrontate con la dinamica deducibile dallo studio teorico del manovellismo, consentono di escludere particolari “vizi” funzionali o anomalie del motore nel suo complesso.

Ciò è quanto mai importante, in quanto un obiettivo della presente tesi è quello di identificare la morfodinamica vibrazionale di ciascun cilindro a fini diagnostici. È, pertanto, di fondamentale importanza escludere macro anomalie legate a difetti preesistenti nel sistema motore.

Ai fini della diagnosi o della caratterizzazione, in particolar modo della fase di combustione, la Wavelet prescelta è quella che meglio permette di evidenziare l'esistenza sia della frequenza (quella di *burning* che è pari a circa 2500Hz) e sia della forma (morfologia). Stante quanto sopra abbiamo coniato il termine “morfodinamica vibrazionale”. Con riferimento alla frequenza di burning si sono studiati i circa 6° di manovella che interessano la fase di combustione più repentina. Infatti, nota la condizione di funzionamento del motore, ossia 2500rpm si ottiene che un periodo si svolge in 0.024s. Per cui, si ha che:

$$360^\circ : 6^\circ = 0.024 : x$$

dove $x = 0.0004s$ il tempo necessario per percorrere 6° di manovella. Da cui si ottiene la frequenza di burning di 2500Hz.

Stante quanto detto, supponendo le masse nei vari manovellismi uguali, le forze d'inerzia dovute alla rotazione (F_{ir}) sono equilibrate così come i relativi momenti.

Le forze d'inerzia del primo ordine (F'_{ia}) generate dal moto alternato sono anch'esse equilibrate con i relativi momenti, mentre le forze d'inerzia del secondo ordine non risultando equilibrate danno origine ad una risultante pari a $4F''_{ia}$.

Stante le equazioni del manovellismo si è potuto ricostruire l'andamento teorico del moto relativo al baricentro del motore, scomponendolo in moto rotatorio ed alternato dovuto alle masse in gioco. Inoltre abbiamo anche riprodotto il moto (teorico) generato dalla somma delle due componenti anzidette.

Viceversa, il moto reale inerziale relativo al baricentro del motore, proiettato sul piano x,z (x trasversale e z verticale rispetto al basamento del motore), è stato possibile ricostruirlo grazie ai fotogrammi acquisiti attraverso l'impiego di una telecamera veloce, capace cioè di eseguire 5000frames/s.

Dal confronto degli andamenti teorici e reali si è avuto modo di constatare una forte correlazione e sovrapposizione, sia delle singole componenti sia della loro somma.

Come già anticipato, si ritiene questa, una fase preliminare di fondamentale importanza al fine di escludere difetti preesistenti nella complessa componentistica del motore, sia essa meccanica ma soprattutto elettronica. Poter predeterminare, quindi, le condizioni relative alla morfodinamica vibrazionale significa in sostanza poter definire una baseline da cui partire per futuri confronti circa lo “stato di salute” del motore, soprattutto se questo è un motore ad accensione per compressione: i fattori che possono intervenire in qualsiasi momento ad alterare lo stato di salute sono molteplici e molte volte concomitanti e, di conseguenza, di difficile identificazione e diagnosi.

Infatti, come è noto, i motori per compressione bruciano un combustibile poco volatile. Questo impone l’iniezione di uno spray di combustibile direttamente in camera di combustione senza passare attraverso la fase di pre-miscelamento con l’aria come avviene nei motori ad accensione comandata. Ne consegue che il processo di combustione risultante è prevalentemente diffusivo e non dipende dal rapporto aria-combustibile globale ma da quello locale. I motori diesel lavorano, perciò, con eccesso d’aria e la regolazione della potenza è realizzata variando la portata di combustibile.

La pressione media effettiva (pme) dipende direttamente dalla massa di combustibile per ciclo (come è noto in un motore a 4 tempi, 2 giri corrispondono a 1 ciclo) ed è limitata superiormente da:

- limiti sulle emissioni inquinanti ai bassi regimi
- massimi carichi meccanici ai regimi intermedi (prossimi al regime di massima coppia)
- massimi carichi termici agli alti regimi (prossimi al regime di massima potenza)

Se consideriamo, poi, che la quantità di combustibile iniettata in ciascun cilindro, nel caso di motori *automotive*, per ciclo è molto bassa ($4\div 40\text{mm}^3$), e che la regolarità del processo di combustione, da cui dipende gran parte della morfodinamica vibrazionale, tema centrale della presente tesi, è determinata, in

modo particolare, dallo spray di combustibile, il compito del sistema di iniezione è particolarmente complesso.

Esso deve garantire:

- alta pressione di iniezione
- quantità di combustibile adeguata al carico
- fasatura (vale a dire, corretti istanti di inizio e fine iniezione)
- uniformità di alimentazione fra i vari cilindri
- caratteristiche dello spray tali da ottenere un processo di combustione regolare e basse emissioni inquinanti in tutto il campo di funzionamento del motore.

Come detto, la WT ha come caratteristica principale quella di consentire la rilevazione temporale, ad una prefissata frequenza dagli andamenti accelerometrici generati durante il funzionamento del motore. Per conto suo l'accelerometro rileva le onde meccaniche impulsive attraverso rilevamenti piezoelettrici. È molto importante, a tal fine, sia la qualità dell'accelerometro in termini di “sensibilità” sia la densità di campionamento. Nel nostro caso la sensibilità (*sensitivity*) è di 1mV/ms^{-2} mentre la densità di campionamento è stata di circa 100kHz. Tali parametri sono tali da poter garantire una buona visione di ciò che accade in ciascun cilindro, dove, data la velocità di lavoro standard 2500rpm, un giro completo si compie in circa 24ms. In tale lasso di tempo avvengono due combustioni complete. Se teniamo presente che, mediamente la fase più violenta della combustione si compie in circa 3° di manovella allora ricaviamo che occorrono circa 0.2ms per osservare il picco di accelerazione. Il tutto si traduce in un fenomeno che si attesta intorno ai 5kHz. Pertanto se vogliamo cogliere buona parte della firma morfovibrazionale durante la combustione che avviene in un cilindro dobbiamo ricorrere ad una Wavelet che abbia la frequenza centrale collocabile tra la seconda e la quarta ottava, vale a dire $10 \div 20\text{kHz}$. Per il nostro studio abbiamo scelto una Wavelet della famiglia Daubechies: Db5, scala 3, sampling rate 102400Hz, frequenza centrale 22756Hz.

Come detto, l'accelerometro rileva le onde meccaniche prodotte dal motore tra cui anche quelle che si producono per effetto della combustione. Tutti i motori producono un modello prevedibile (teorico) di questi impulsi. Nel nostro caso, questa onda di impulsi viene rilevata dall'accelerometro e dal sensore laser. Il tutto viene registrato insieme con il numero di giri esibito dal motore e con il segnale tachimetrico che consente l'allineamento temporale dei giri dell'albero di manovella con tutti i segnali rilevati.

È possibile tenere traccia così delle variazioni e delle irregolarità di funzionamento di ciascun cilindro in modo da risalire agli eventuali problemi relativi al motore. La sequenza di impulsi può essere influenzata dal carburante incombusto come pure dalle variazioni nell'anticipo ma anche dallo scarico regolato elettronicamente. Poiché i problemi del motore, generalmente, determinano una oscillazione della forma d'onda che si estende al di sopra ed al di sotto della media degli altri cilindri, diventa importante l'analisi comparativa dei cilindri stessi. In generale, possiamo dire che maggiore è la correlazione e l'uniformità di distribuzione al di sopra ed al di sotto della curva baseline, presa come riferimento al tempo zero, migliori sono le condizioni del motore monitorato.

Le condizioni dovute ad una mancanza di carburante o da una scarsa combustione sono causa di un calo raffigurato nella forma d'onda. Problemi derivanti da eccesso di carburante (causati da iniettori sporchi, scarsa combustione, o altro) vengono visualizzati con un calo della forma d'onda seguita da un aumento al di sopra della baseline in quanto il motore, gestito dalla centralina elettronica che riceve ad esempio il segnale di eccesso di ossigeno, lavora per compensare il carburante in eccesso che brucia nel collettore.

Nella Fig. 6.73 è riportato l'andamento della pressione registrata in camera di combustione attraverso un trasduttore installato sulla testa di un cilindro (motore diesel, Ford Transit).

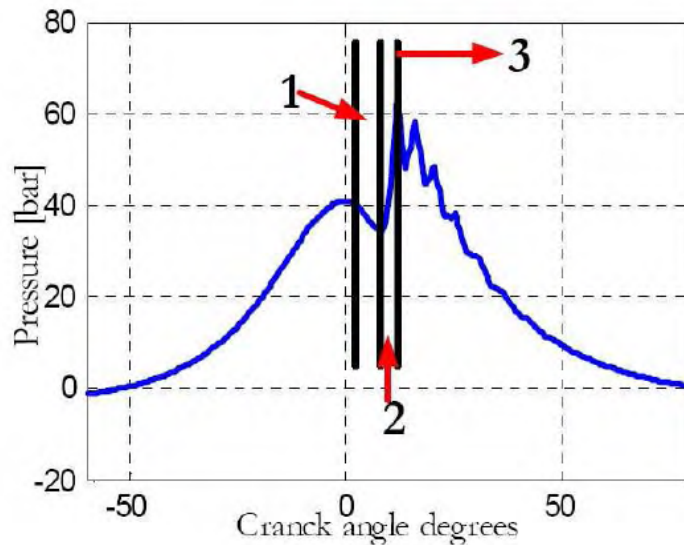


Fig. 6.73

Dalle sue osservazioni si possono distinguere 3 fasi:

- fase 1, detta di ritardo all'accensione. Vale a dire il periodo temporale che intercorre tra l'inizio della iniezione del combustibile nella camera di scoppio e l'inizio della combustione identificabile dalla improvvisa e repentina variazione di pendenza. In tale fase abbiamo la formazione di goccioline di combustibile che evaporano parzialmente formando una zona di pre-miscelamento in testa al cilindro, pronte per la combustione vera e propria;
- fase 2, in cui avviene una rapida combustione. Le condizioni all'interno del cilindro sono tali da fare auto-accendere la miscela aria/combustibile. In tal caso vi è la maggiore quantità di energia/calore prodotta/rilasciata. Essa è caratterizzata da una rapida impennata della pressione; il tutto in pochi gradi di manovella ($\sim 3^\circ$);
- fase 3, in cui avviene una combustione più lenta e controllata. È anche la fase in cui il pistone, spinto verso il basso, rilascia la maggior parte di energia e quindi di lavoro.

È in questa fase che si concentra l'attenzione per stabilire la condizione del motore. Infatti i tracciati morfodinamici, di cui appresso si daranno alcune

illustrazioni, consentono, se opportunamente registrati, di verificare future variazioni circa la firma caratteristica di ogni cilindro. Significative variazioni nei valori critici rispetto alla norma, in generale sono indice di irregolarità di funzionamento che si concentrano durante la fase di combustione. Insomma, l'analisi dettagliata della variazione di pressione in camera di combustione può essere impiegata per stabilire le condizioni di lavoro di un motore.

C'è però da osservare che l'installazione di un trasduttore di pressione su ogni cilindro oltre ad essere estremamente costoso è anche eccessivamente invasivo. Bisogna, infatti, operare dei fori sulla testa di ogni cilindro dentro i quali installare i trasduttori di pressione; in alcuni laboratori si stanno sperimentando sonde meno invasive in fibre ottiche. Comunque il sistema risulta ancora molto costoso e applicabile ancora soltanto nei laboratori di ricerca.

L'applicazione di accelerometri oltre ad essere più recente è ancora basata sullo studio di incipienti frequenze deducibili dalla Trasformata di Fourier.

Nella Fig. 6.74 è riportato un esempio di impulsi accelerometrici prodotti da successive combustioni, riportati nel dominio del tempo.

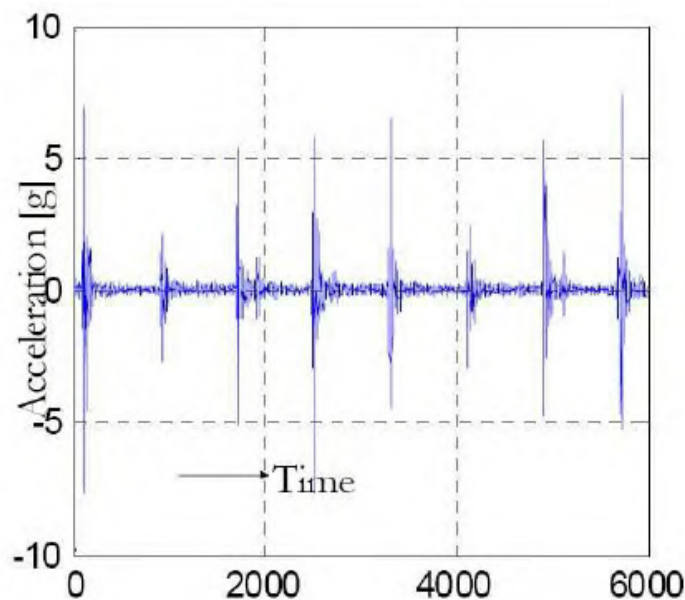


Fig. 6.74

La Fig. 6.75 mostra la sovrapposizione della variazione di pressione fatta registrare in camera di combustione da una singola detonazione vs i gradi di

manovella e la relativa registrazione accelerometrica, opportunamente fatta coincidere con il picco pressorio/accelerometrico. I ricercatori in tal caso hanno trovato una forte correlazione tra il picco pressorio ed il picco accelerometrico. Essi hanno verificato che anomalie di combustione potrebbero essere rilevate osservando la variazione del picco accelerometrico. Sono in corso anche studi che impiegano oltre agli accelerometri anche rilevatori di ultrasuoni. I risultati non sono ancora affidabili. Come pure sono in corso studi sui gas di scarico per rilevare problemi di combustione.

Nel presente lavoro di tesi, abbiamo approcciato il problema dello studio delle anomalie/irregolarità di combustione a fini diagnostici, impiegando sia, come detto, metodiche che afferiscono a scomposizione del segnale (video-grafico) afferenti alla Teoria del Caos, sia a metodiche che impiegano, per la scomposizione del segnale accelerometrico, la Trasformata Wavelet.

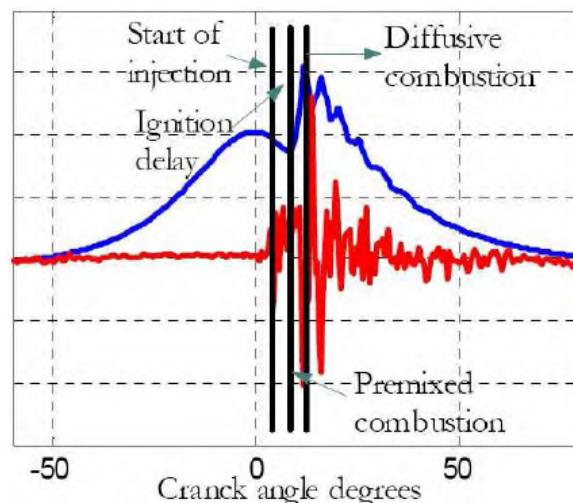


Fig. 6.75

Attraverso quest'ultima metodica è possibile rilevare la sequenza vibrazionale determinata sia dal moto delle masse (forze inerziali) che quelle dovute alla combustione. La rappresentazione che questa volta se ne ricava è quella nel dominio del tempo.

6.6.2 Risultati videografici

Con riferimento alla Fig. 6.12 si precisa che questo diagramma è puramente teorico, avendolo ottenuto applicando le leggi sul manovellismo.

La Fig. 6.13 rappresenta gli spostamenti dello spot laser nella direzione dell'asse x per due sequenze di combustioni omologhe. La ripetibilità della combustione/detonazione è evidente dalla distribuzione dei punti molto vicina alla bisettrice e quantitativamente rappresentata dal coefficiente di correlazione.

In Fig. 6.14 sono rappresentati gli spostamenti nella direzione z dovuti alle suddette forze di inerzia con riferimento alla coppia di cilindri I in tre esplosioni successive.

Anche in questo caso la figura si riferisce ad un solo giro dell'albero motore, durante il quale avviene la detonazione di una sola coppia di cilindri.

Gli spostamenti nella direzione z sono in questo caso dovuti alle forze di inerzia alternative verticali nonché alle forze generatesi per effetto delle combustioni; tali forze sono imputabili prevalentemente al moto alternativo della biella, della manovella, dello stantuffo, almeno per quella parte in cui lo stantuffo è posizionato nell'intorno del PMS e del PMI.

Con riferimento alla Fig. 6.15 anche in questo caso è doveroso precisare che questo diagramma è del tutto teorico, infatti anche tale diagramma è stato ottenuto applicando le leggi sul manovellismo.

La Fig. 6.16 conferma la regolarità vibrazionale lungo la direzione dell'asse z . Infatti, in tale figura, sono riportate due sequenze relative alle detonazioni di cilindri omologhi. La mappatura dei punti molto vicina alla bisettrice conferma, come del resto anche il calcolo del coefficiente di correlazione, la ripetibilità della dinamica vibrazionale rilevata.

Le Fig. 6.17 e Fig. 6.18 sottolineano la significativa rassomiglianza delle due *shape* (teorica-sperimentale). Ciò conferma lo “stato di salute” del motore, esente da irregolarità tecnico-funzionali sia di natura meccanica che di natura termodinamica.

Per le Fig. 6.19, Fig. 6.20 si veda il commento relativo alla Fig. 6.14, con la differenza che esse si riferiscono agli spostamenti rispettivamente nella direzione x , z , dovuti a tre successive detonazioni nei cilindri II.

In Fig. 6.21 è diagrammata la risultante degli spostamenti, lungo le direzioni x e z , dovuti a tre successive detonazioni nei cilindri II.

In Fig. 6.22 è evidente che il segnale, che è un segnale reale acquisito con la videocamera veloce, disegna una forma quasi circolare ad ogni detonazione dei cilindri I; tale comportamento è indicativo del fatto che il motore, nel suo funzionamento, ha una certa stazionarietà o quasi stazionarietà.

Le forme circolari relative alle tre combustioni si sovrappongono fra loro in maniera tale da confermare la ripetibilità dei dati acquisiti.

Quanto detto relativamente alla regolarità del nostro segnale video-grafico è forse ancora più evidente nella Fig. 6.23.

In Fig. 6.23 si nota che la dinamica della serie numerica dei dati acquisiti (spostamento dei centroidi nella direzione z) è regolare, infatti il grafico fluttua intorno ad un valore K_ω in un *range* molto prossimo allo zero. Qualora il grafico si fosse assestato per valori di K_ω prossimi ad 1, allora avremmo potuto concludere che il *sistema motore* presenta significative irregolarità di funzionamento ad ogni giro.

Si evidenzia anche in questo grafico, la perfetta sovrapponibilità delle curve relative agli spostamenti dei centroidi nella direzione z .

Si osservi una particolarità: per $2.0 \leq \omega \leq 2.80\text{rad}$ le tre curve, pur conservando lo stesso andamento, si discostano lievemente l'una dall'altra. Tale scostamento è motivabile considerando che quando ω si trova in quell'intervallo di valori nel cilindro sta avvenendo la combustione ed ovviamente, a causa di una serie di variabili, come ad esempio il non identico svuotamento della camera di combustione, un lieve anticipo di fase, ecc., la dinamica della combustione/detonazione non potrà mai essere perfettamente identica. Tale fase vale circa $\Delta\omega = 0.8\text{rad} \approx 46^\circ$ angolo di manovella.

In Fig. 6.24 si nota che i punti della mappa rappresentativi della terza detonazione verificatasi nei cilindri I si discostano da quelli rappresentativi delle altre esplosioni. È probabile che in questa fase i cilindri I abbiano prodotto una serie di combustioni non perfettamente sovrapponibili. Quando si verificano tali detonazioni è verosimile che il diagramma presenti un tale andamento. Questa osservazione è molto interessante perché fa comprendere che non tutte le

combustioni/detonazioni, anche se riferiti alla medesima coppia di cilindri si sviluppano con le stesse caratteristiche.

Con riferimento alla Fig. 6.25, a differenza della Fig. 6.23, poiché gli spostamenti (dovuti alle forze di inerzia) nella direzione trasversale x sono di minore entità rispetto a quelli che nello stesso intervallo temporale si producono lungo la direzione z . La lieve diversità nella combustione dei cilindri I per le tre detonazioni, non determina uno scostamento così evidente in corrispondenza del range di ω in cui avviene la combustione stessa. Le tre curve si sovrappongono perfettamente l'una sull'altra.

È evidente, osservando la Fig. 6.26, la regolarità del *sistema motore* disponendosi i punti in maniera tale da formare una figura circolare nelle tre combustioni.

Rivolgendo l'attenzione alla Fig. 6.27, se il motore fosse perfettamente equilibrato e se tutte le combustioni avvenissero allo stesso modo, si avrebbe che tutte le curve $K_\omega - \omega$ sarebbero perfettamente sovrapponibili.

Da qui la non perfetta sovrapponibilità delle curve per i valori di ω evidenziati.

In Fig. 6.28 è quanto mai evidente l'ottima sovrapponibilità assunta dai punti relativamente alle posizioni nel piano xz , in corrispondenza della prima e terza detonazione, della coppia I di cilindri.

6.6.3 PMIv e PIv vibrazionale

Per quanto riguarda i risultati accelerometrici si sottolinea l'importanza di un elevato *sampling rate* (102400Hz). Gli accelerometri impiegati sono della Brüel & Kjær, tipo 4395 (v. Appendice B.2).

In Fig. 6.32 è riportato il confronto di 3 ricostruzioni di PMIv vibrazionale ottenute a partire dal segnale accelerometrico. In particolare sono state elaborate, come detto, 3 sequenze accelerometriche, che opportunamente trattate riportano i tre diagrammi sovrapposti in nero, verde e rosso. Tali ricostruzioni sono tutte ricavate con la stessa metodologia mediando geometricamente per 50 periodi. È ben evidente la forte somiglianza nella *shape* delle tre curve.

In Fig. 6.33 la curva rossa è la ricostruzione del segnale accelerometrico, scomposto a mezzo Wavelet, ottenuta con le prime 40 armoniche mediate geometricamente 50 volte. Nella figura si notano due picchi che rappresentano la detonazione nei cilindri 1-3. Il picco a sinistra fra $-210^\circ \div -150^\circ$ corrisponde alla detonazione nel cilindro che convenzionalmente è indicato con 3 (Fig. 6.35), il picco a destra fra $-30^\circ \div +30^\circ$ corrisponde alla detonazione nel cilindro che è indicato convenzionalmente con 1 (vedi Fig. 6.34).

Per le Fig. 6.36, Fig. 6.37, Fig. 6.38, Fig. 6.39, Fig. 6.40, Fig. 6.41, Fig. 6.42, valgono, con le dovute differenze, le considerazioni fatte per le Fig. 6.33, Fig. 6.34, Fig. 6.35.

In Fig. 6.43 e Fig. 6.44 è particolarmente evidente il fenomeno tecnicamente denominato *afterburning*. Tale fenomeno consiste in una indesiderata esplosione che si verifica a seguito dell'espansione dovuta alla combustione/detonazione. Le cause di questo fenomeno possono essere molteplici, sia di natura fisica che di natura termodinamica.

Nelle figure, Fig. 6.45 ÷ Fig. 6.68, si riporta l'andamento della PIV vibrazionale istantanea, vale a dire non mediata geometricamente, relativa ai cilindri I ed ai cilindri II, in corrispondenza dei periodi 1, 2, 3, 4.

Generalmente la combustione in un motore a c.i. a compressione (Diesel) dipende da molteplici fattori che possono continuamente variarne e caratterizzarne l'andamento. In particolare l'andamento della pressione istantanea è quella che maggiormente risente di irregolarità legate a fattori esterni e/o interni, e per tale ragione la suddetta ricostruzione assumerà vari andamenti.

Con riferimento ai risultati ottenuti dalle ricostruzioni delle PIV (riportate nelle Fig. 6.45÷Fig. 6.68) si osserva, anche da semplici considerazioni statistiche (v. Tab. 6.1), la sensibilità nonché l'affidabilità della metodologia proposta. Preliminarmente, si precisa che sulle ascisse lo 0° di *crank angle* è, posizionato nell'origine.

Dalle specifiche tecniche forniteci da Chrysler - VM Motori (Appendice E.2) si ricava che l'angolo formato dalla biella del cilindro 1 (posizionato come in nella figura riportata in Appendice E, Fig. E.5, e qui per comodità di lettura

riportata) con il sensore capacitivo (inserito per rilevare il numero di giri dell'albero a gomiti) è pari a 55° .

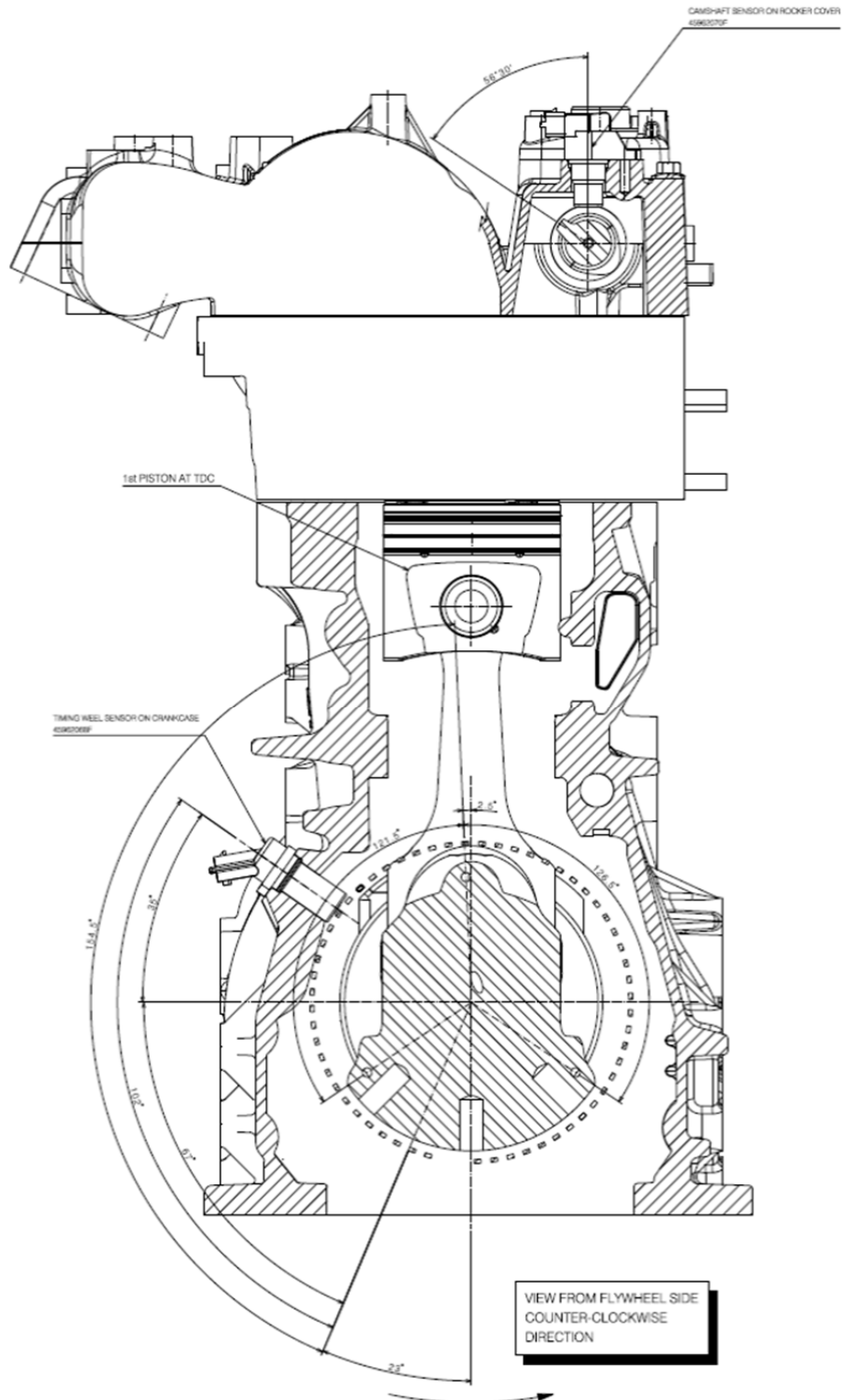


Fig. E.5

Noto l'ordine di accensione 1-3-4-2, come detto precedentemente, si sono distinte le sequenze accelerometriche relative alle detonazioni dei cilindri I, da quelle relative ai cilindri II.

Si osservi che il segnale tachimetrico visibile in Fig. 6.76, in corrispondenza del picco, mostra un tempo di transizione da minimo a massimo di circa 92 u.d.t. Come è noto una ruota fonica monta 60 denti di cui 2 consecutivi vengono eliminati per consentire al *proximity* di segnalare il "vuoto" da essi determinato (v. Fig. 6.76). Considerazioni puramente geometriche consentono di valutare l'angolo di manovella corrispondente a circa 12° . L'analisi numerica condotta sul segnale di cui alla Fig. 6.76 porta a valutare tale angolo di circa 13.5° , quindi prossimo a quello teorico. Infatti, poichè le prove sono state effettuate a $2500\text{rpm} \cong 41.66\text{ giri/s}$, allora si ottiene che il periodo $T = 0.024\text{s/giro}$. Sapendo che la frequenza di campionamento è di 102400Hz e noto che 1 periodo è composto da circa 2457 u.d.t., si ha:

$$92 : 2457 = x : 360^\circ$$

da cui $x \cong 13.5^\circ$.

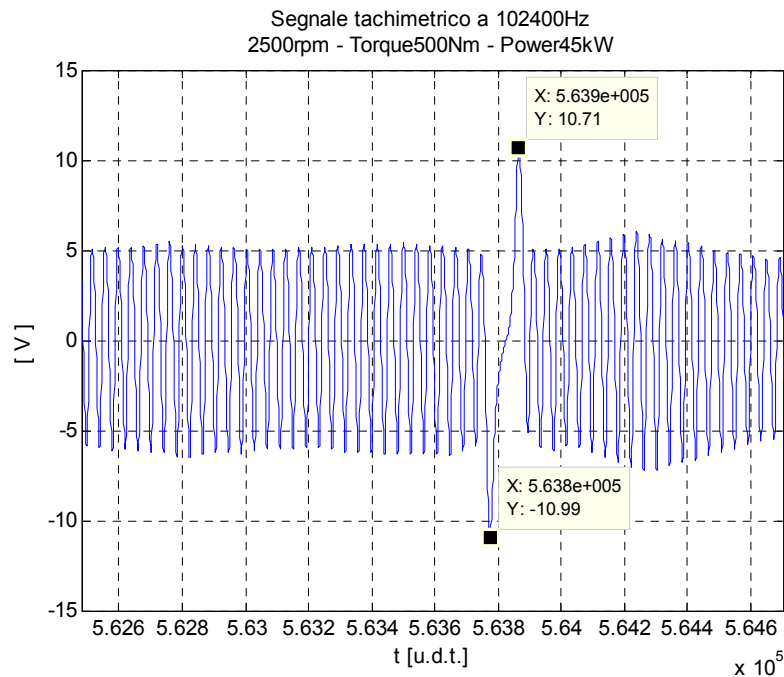


Fig. 6.76

Dallo schema del motore (riportato in Appendice E.2) si vede che il sensore tachimetrico è collocato a 55° rispetto al punto morto superiore. Questo ci fa osservare che la collocazione angolare a cui perviene la prima detonazione, riferibile al quarto cilindro è pari:

$$180^\circ - 55^\circ + 13.5^\circ - 2.5^\circ = 136^\circ,$$

dove per il -2.5° si faccia riferimento alla Fig. E.5 (specifiche tecniche Chrysler - VM Motori).

Per quanto riguarda la seconda detonazione bisogna attendere 180° ottenendo circa 316° .

In tabella Tab. 6.1 sono riportati i valori di crank angle riferiti al valore massimo del prodotto convolutorio restituito dalla Trasformata Wavelet.

Si osserva che per quanto riguarda la prima detonazione relativa alle sequenze I, mediamente il valore di crank angle, in occasione del picco dei coefficienti wavelet è di circa 136° con una deviazione standard di circa 4° . La seconda detonazione relativa alle sequenze I avviene mediamente a circa 321° (sempre in occasione del massimo dei coefficienti wavelet) con una deviazione standard di circa 1° .

Con riferimento sempre al massimo valore assunto dai coefficienti wavelet, per quanto riguarda i cilindri II, mediamente il valore di crank angle è di circa 135° con una deviazione standard di circa 6° per quanto riguarda la prima detonazione mentre per il secondo si hanno valori di crank angle di circa 314° con una deviazione standard di circa 5.6° .

	1 ^a detonazione [deg]	2 ^a detonazione [deg]		1 ^a detonazione [deg]	2 ^a detonazione [deg]
Ciclo1 I	135.7	320.1	Ciclo1 II	141.6	320
Ciclo2 I	141.7	321.6	Ciclo2 II	133.3	310.6
Ciclo3 I	132.3	321.1	Ciclo3 II	128.1	309.5
Ciclo4 I	134.7	322.4	Ciclo4 II	139.8	319.4
Media	136.1	321.3	Media	135.7	314.875
DS	3.996665	0.962635	DS	6.195159	5.594864

Tab. 6.1

I dati teorici ottenuti, poco si discostano da quelli rilevati sperimentalmente in quanto, in un motore diesel, sono evidenti le irregolarità di funzionamento (Appendice D) che possono verificarsi e a cui sono legati leggeri anticipi/ritardi di fase.

6.6.4 Circa la densità di campionamento

Per descrivere con accuratezza l'evoluzione di un fenomeno dinamico instabile e non lineare è necessario rispettare alcune condizioni, in particolare la densità di campionamento. Essa è fortemente dipendente dalla tecnologia impiegata e dalla sua risposta. Ad esempio, molta cura deve essere posta allorquando impieghiamo accelerometri che presentano la loro risonanza interna molto prossima a quella che è la frequenza di campionamento a cui si intende acquisire il fenomeno monitorato. Va da sé che onde evitare fenomeni di *aliasing* è indispensabile campionare con frequenza almeno doppia di quella massima presentata dal sistema (T. di Nyquist). Ma vi è ancora un altro elemento che riteniamo fondamentale dover rispettare; esso riguarda la scelta di un'opportuna velocità di campionamento che, fermo restando quanto poc'anzi riportato, consenta di non incorrere in quello che si potrebbe definire come risonanza di "sincronizzazione". È noto che osservando i raggi di una ruota abbiamo a volte l'impressione che essi girino all'incontrario rispetto al reale senso di marcia della ruota. Ebbene questo fenomeno si verifica allorquando la frequenza con cui essi girano non è sincronizzata con una ottava multipla dell'osservatore. Nella Fig. 6.67 che segue è riportato il diagramma $K_{\omega}(\tau_s)$ vs τ_s .

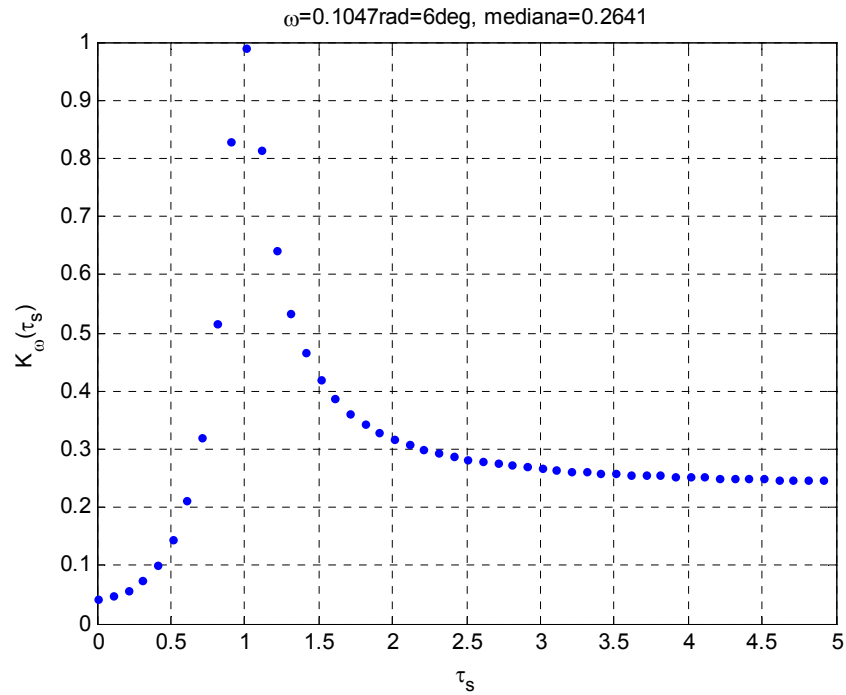


Fig. 6.77

È ben visibile la condizione di risonanza in cui viene a trovarsi il campionamento se la sua densità è pari a quella della frequenza di interesse ($2500\text{Hz} \cong 6^\circ$ di manovella). Pertanto se si campionasse a tale frequenza ovviamente si verificherebbe una condizione di sincronizzazione (risonanza) tra la frequenza con cui l'evento evolve e la frequenza di campionamento. Però in queste condizioni $K_{\omega} \rightarrow 1$, vale a dire tende ad un valore che si può definire caotico. Infatti l'evento a cui si è interessati lo vedremmo con la sua stessa frequenza di accadimento e quindi senza quella accuratezza (dettaglio) a cui invece siamo interessati. Pertanto poiché il valore della mediana è pari a circa 0.26 l'evento di per se può essere meglio interpretato e visualizzato se si campiona con frequenza superiore a 2500Hz. Nel nostro caso poiché a circa 100kHz non si presentano fenomeni della suddetta risonanza di sincronizzazione (v. Fig. 6.78) si è raggiunti un buon compromesso tra sensibilità e specificità di campionamento. La risposta che si è ottenuta è stata già illustrata e commentata nei paragrafi precedenti.

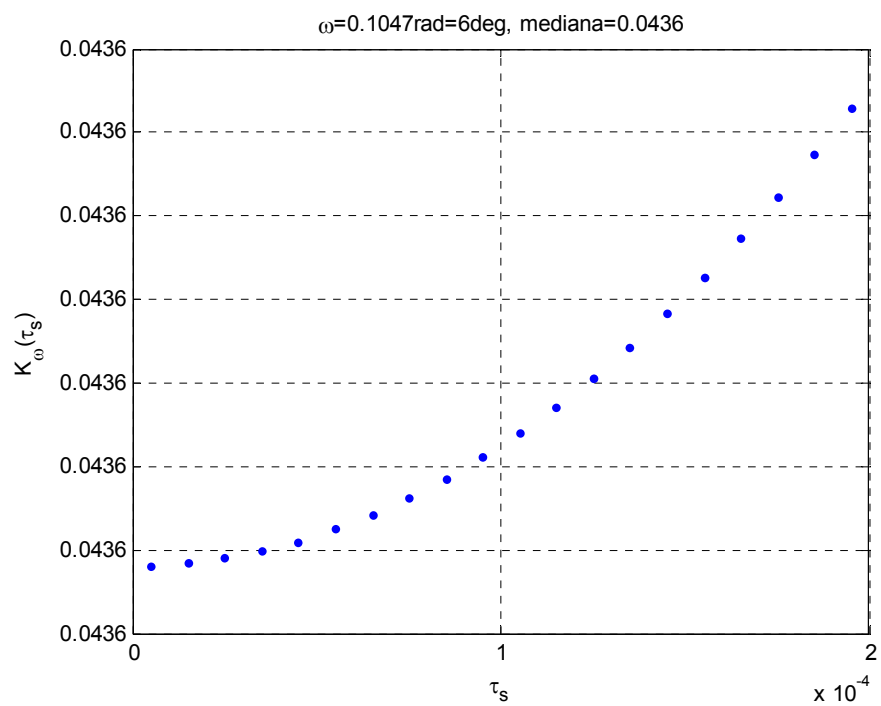


Fig. 6.78

Conclusioni

Obiettivo di questa tesi è stato la messa a punto di metodologie alternative per il monitoraggio vibrazionale di sistemi meccanici complessi. Le metodologie illustrate hanno riguardato sia il campo della meccanica fredda che il campo della meccanica calda.

Le vibrazioni misurate su un generico sistema meccanico complesso, durante il suo funzionamento, contengono molte informazioni circa il suo “stato di salute”.

In condizioni normali di funzionamento, ogni sistema meccanico possiede un comportamento vibrazionale tipico, caratterizzato da una certa “firma” (*pattern*); una variazione significativa di tale pattern, può essere indice dell’insorgere di anomalie nel sistema.

Per segnali però, che presentano rapide evoluzioni temporali (*spike*), non è possibile applicare metodologie ricorrenti alla classica analisi spettrale di Fourier.

L’obiettivo è stato, quindi, quello di ricercare tecniche e metodi alternativi di analisi, estremamente affidabili e sensibili, che possano essere adoperati nelle condizioni appena descritte.

Le metodologie utilizzate presentano come denominatore comune la “sensibilità specifica”.

Esse, cioè, devono, innanzi tutto, essere in grado di rilevare la presenza di incipienti anomalie di natura elasto-cinetico-dinamica con sufficiente anticipo e con la necessaria specificità e sensibilità.

Per quanto concerne il campo della meccanica fredda, si è provveduto ad approntare tecniche di monitoraggio per un cambio per *automotive*.

L’analisi del segnale accelerometrico attraverso la Trasformata Wavelet, che garantisce elevata specificità, possiede caratteristiche di sensibilità molto spinte consentendo un eventuale rilievo di anomalie in maniera più repentina. La teoria delle Wavelet è strettamente correlata ad alcune conclusioni a cui perviene la Teoria del Caos; infatti l’utilizzo di entrambe le teorie ha permesso di mettere a punto un algoritmo che consente di interrompere la prova anticipatamente e, di conseguenza, un’ispezione più significativa all’interno della scatola cambio.

L'integrazione delle suddette informazioni, sebbene ottenute da metodiche tra loro diverse, consente di rilevare anomalie circa la normale firma vibrazionale di funzionamento, che si determinano proprio nell'istante in cui si riscontrano derivazioni accelerometriche, anche su un sistema di per sé molto complesso.

Nell'ambito della meccanica calda, si è provveduto ad approntare tecniche di monitoraggio per motori a c.i.

Infatti, grazie alle metodiche proposte, sono sufficienti pochi secondi di acquisizione per effettuare una diagnosi che metta in evidenza lo stato di salute del motore, sia dal punto di vista meccanico, attraverso lo studio delle vibrazioni ascrivibili alle forze inerziali che intervengono nel manovellismo, sia da quello più "temodinamico" attraverso la valutazione delle PMIV e PIV vibrazionali.

Ne consegue che, il lavoro svolto in laboratorio può essere esportabile ad una realtà industriale. Infatti la metodologia impiegata utilizza la sensoristica meno invasiva possibile, limitando anche le informazioni da acquisire. Si noti che le metodologie proposte, nonostante siano più sensibili alle variazioni dello "stato di salute" dei sistemi dinamici, non richiedono maggiori carichi computazionali.

Appendice A

Sistema di elaborazione

Computer:	
Tipo computer	ACPI x64-based PC
Sistema operativo	Microsoft Windows 7
DirectX	4.09.00.0904 (DirectX 9.0c)

Scheda madre:	
Tipo processore	QuadCore Intel Core i7 920, 2800 MHz (21 x 133)
Nome scheda madre	Asus P6T (2 PCI, 1 PCI-E x1, 3 PCI-E x16, 6 DDR3 DIMM, Audio, Gigabit LAN, IEEE-1394)
Chipset scheda madre	Intel Tylersburg X58, Intel Nehalem
Memoria di sistema	8182 MB (DDR3-1333 DDR3 SDRAM)

Scheda video:	
Adattatore video	NVIDIA GeForce 9800 GT (Microsoft Corporation - WDDM v1.1) (1024 MB))
Acceleratore 3D	nVIDIA GeForce 9800 GT
Schermo	Asus VW198 [19" LCD] (82LMTN008118)

Multimedia:	
Periferica audio	Realtek ALC888/1200 @ Intel 82801JB ICH10 - High Definition Audio Controller

Archiviazione:	
Unità floppy	Unità disco floppy
Unità disco	STM3500418AS ATA Device (500 GB, 7200 RPM, SATA-II)
Unità disco	WDC WD3000HLFS-01G6U1 ATA Device (279 GB, 10000 RPM, IDE)
Unità ottica	HL-DT-ST DVD-RAM GH22NS50 ATA Device (DVD+R9:16x, DVD-R9:12x, DVD+RW:22x/8x, DVD-RW:22x/6x, DVD-RAM:12x, DVD-ROM:16x, CD:48x/32x/48x DVD+RW/DVD-RW/DVD-RAM)

Partizioni:	
C: (NTFS)	279.4 GB (194.1 GB disponibili)
E: (NTFS)	465.8 GB (392.9 GB disponibili)
Capacità	745.1 GB (587.1 GB disponibili)

Periferiche di input:	
Tastiera	Tastiera PS/2 standard
Mouse	Mouse Microsoft PS/2


Periferiche:	
Stampante	Adobe PDF
Stampante	Brother MFC-215C USB Printer
Stampante	Brother PC-FAX v.2.1
Stampante	Brother PC-FAX v.2
Stampante	CutePDF Writer
Stampante	Fax
Stampante	HP Color LaserJet 2600n
Stampante	Microsoft XPS Document Writer
Stampante	Printer Driver Type 104 PCL 6
Stampante	SmarThru PC Fax
Controller FireWire	VIA OHCI Compliant IEEE 1394 Host Controller (PHY: VIA VT6307)

Appendice B

Strumentazione

B.1 Amplificatori

DeltaTron Power Supply Type WB-1372

 <p>The image shows a green DeltaTron Power Supply WB-1372. It has a central analog meter with a scale from 0 to 100. Above the meter are three terminals labeled 'Input', 'Power Off', and 'Output'. Below the meter is a 'Battery' terminal. The unit is labeled 'DeltaTron™ Power Supply WB 1372' and 'Model 8-1-1987'.</p>	<p>WB-1372 Physical Dimensions</p> <ul style="list-style-type: none"> • Height: 39 mm (1.5") • Width: 65 mm (2.5") • Depth: 120 mm (4.7") • Weight: 250 gram (8.8 oz.)
Channels	1
Type Number	WB-1372
Description	DeltaTron Power Supply

Features of WB-1372

- Powers one DeltaTron transducer
- Input/output BNC sockets
- Transducer current: 3 mA ($\pm 20\%$)
- Displays bias voltage on the meter
- Dynamic Impedance: $>100\text{ k}\Omega$
- The unit uses three 9 V standard batteries, that is, 6LR61
- Battery check
- AC output

B.2 Accelerometri Brüel & Kjær, Tipo 4395

Product Data

DeltaTron® Range

Miniature Accelerometer Types 4394, 4397
Accelerometer Types 4395, 4396, 4398, 4399
Charge Converter Type 2646
Power Supply ZG0328

USES:

- Shock and vibration measurement
- Vibration analysis
- Vibration monitoring
- Vibration test control
- Product and quality control

FEATURES:

- All DeltaTron® products operate on constant-current line-drive principles

- Charge converter for conventional accelerometers
- Adaptor for Brüel & Kjær analyzer inputs
- Accelerometers with:
 - Integral preamplifiers
 - All-welded construction
 - Delta Shear® Uni-Gain design
 - Plain or Insulated base
 - Low sensitivity to all extraneous environments
 - Individual standard-traceable calibration

DeltaTron® is the generic name for the new family of accelerometers and signal conditioning products from Brüel & Kjær. The DeltaTron® name identifies products that are designed to operate on a constant-current power supply and to give output signals in the form of voltage modulation on the power supply line.

The DeltaTron® range described in this Data Sheet comprises:

- Piezoelectric accelerometers with integral preamplifiers.
- Charge converter for use with conventional accelerometers.
- Power supply/adaptor for use with Brüel & Kjær Signal Analyzers and other instruments with 7-pin microphone inputs.

All DeltaTron® accelerometers are individually calibrated and a calibration chart showing the individually measured frequency response curve is provided with each accelerometer.

In addition to the products described in this Data Sheet, Brüel & Kjær also supply DeltaTron® accelerometers for permanent industrial installations, a comprehensive range of Delta Shear® piezoelectric accelerometers and a wide range of signal conditioning amplifiers. Details of these products are given in their respective Product Data sheets.



DeltaTron® Accelerometers

The DeltaTron® accelerometers described here are constructed to the proven Brüel & Kjær Delta Shear® design with the addition of an integral preamplifier. They require an external constant-current, power supply and operate as voltage sources.

DeltaTron® accelerometers operate over a frequency range from below 1 Hz to approximately half the resonance frequency of the accelerometer assembly. All are supplied with individual calibration charts which give individually measured frequency response curves (see Fig. 1).

Design and Construction

PZ 23 lead zirconate titanate, piezoelectric elements are used in the accelerometers, whose housings are all-welded. The accelerometers are available as types, with a plain base (no insulation), or as types with an insulated base.

On the insulated types the mounting bases are insulated by high-quality ceramic discs bonded between base and housing. Both base and housing are made of titanium, making the accelerometers very corrosion resistant.

The built-in preamplifier is a charge converter made using thick film technology. It comprises a low-noise MOS Field Effect Transistor as its input stage and a bipolar transistor to give low output impedance. A single-pole filter at the input extends the accelerometer's usable frequency range to approximately 50% of the mounted resonance frequency. Special efforts have been made to minimise interference from RF (radio frequency) electromagnetic fields.

Characteristics

Uni-Gain Sensitivity

The Brüel & Kjær Uni-Gain designation applies to all DeltaTron® accelerometers. This means that the accelerometer sensitivity is adjusted during manufacture to within 2% of either 1 or 10 mV/ms⁻².

Frequency response

The upper frequency limits given in the specifications are the frequencies where the deviation from the reference sensitivity is less than 10%. It is approximately 50% of the mounted resonance frequency. This assumes that the accelerometer is correctly mounted onto the test structure – a poor mounting can have a marked effect on the mounted resonance frequency.

The lower frequency limits and phase response are determined by the built-in preamplifiers. The lower frequency limits are given in the specifications for deviations from reference sensitivity of less than 10%.

The low damping of Brüel & Kjær accelerometers leads to the single, well-defined resonance peak shown on the frequency response curves.

The individually measured frequency response curves with absolute values of amplitude and phase are given on the calibration chart for the major part of the frequency range. At low and high frequencies, the curves given are typical (Fig. 1).

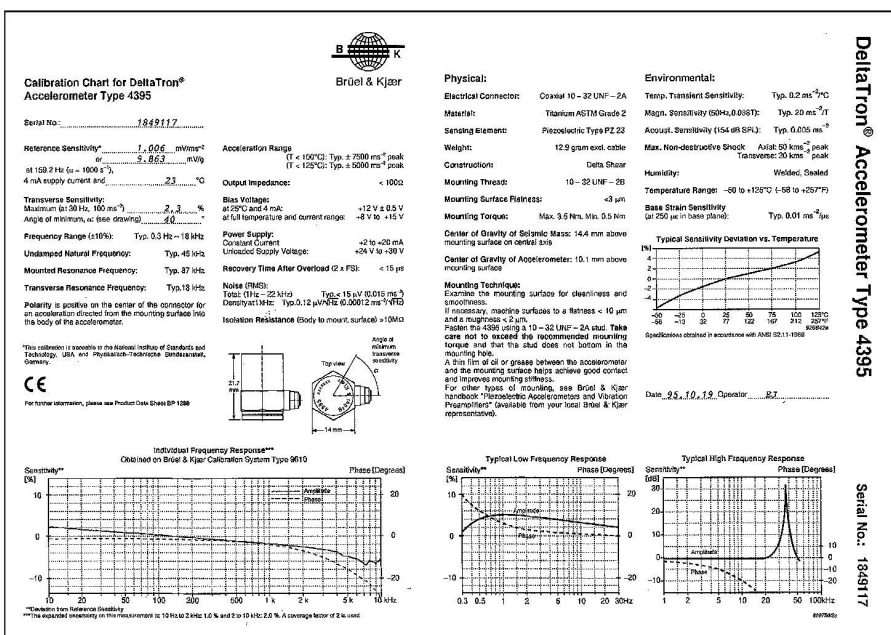


Fig. 1 Example of the calibration chart supplied with Brüel & Kjær DeltaTron® accelerometers

Transverse Sensitivity

All piezoelectric accelerometers are slightly sensitive to acceleration that is perpendicular to their main sensitivity axis. This transverse sensitivity is measured during the factory calibration process using a 30 Hz and 100 ms^{-2} excitation, and is given as a percentage of the corresponding main axis sensitivity.

The direction of minimum transverse sensitivity is indicated on the calibration chart of each DeltaTron® accelerometer.

Transverse Resonance Frequency

Typical values for the transverse resonance frequency are obtained by mounting an accelerometer on the side of a steel cube attached to a Calibration Exciter Type 4290.

Dynamic Range

The dynamic range of an accelerometer is the range over which its electrical output is directly proportional to the acceleration applied to its base.

Upper Limit

In general, the smaller the accelerometer, the higher the vibration level at which it can be used. The upper limit depends on the type of vibration to which the accelerometer is subjected and is determined by the pre-stressing of the piezoelectric elements as well as by the mechanical strength of the element.

The acceleration ranges given in the specifications are determined by the measuring limits of the integral preamplifiers. For transporting and handling, the maximum non-destructive shock is given.

When short duration transient signals are measured, care must be taken to avoid ringing effects due to the high-frequency resonance of the accelerometer. As a general rule, the duration of a half sine shock pulse should be greater than $5/f_R$ for an amplitude error of less than 10%, where f_R is the mounted resonance frequency of the accelerometer.

Lower Limit

The lower limit is imposed by the noise level of the integral preamplifier, which has been constructed to give very low noise levels, and by the environment in which the measurements are made.

A discussion of the effect of environmental influences, can be found in the Brüel & Kjær handbook "Piezoelectric Accelerometers and Vibration Preamplifiers".

Electrical Impedance

All DeltaTron® accelerometers have integral preamplifiers and can be regarded as voltage sources. The output impedance is specified as typically less than 100Ω . With a supply current of $>4 \text{ mA}$ output impedance is typically $<30 \Omega$.

Environment

Temperature

DeltaTron® accelerometers are specified to an operating temperature range of -50°C to $+125^\circ\text{C}$. Throughout this range, the sensitivity of the accelerometers has a small temperature dependence, details of this are given in the individual calibration charts (see Fig. 1).

Temperature Transients

All piezoelectric accelerometers have slight sensitivity to temperature fluctuations. This effect may be significant when low frequency, low level accelerations are being measured.

The procedure for measuring temperature transient sensitivity is described in the Brüel & Kjær handbook "Piezoelectric Accelerometers and Vibration Preamplifiers".

Humidity

DeltaTron® accelerometers have all-welded titanium housings to give them a high resistance to the majority of corrosive agents found in industry. The low impedance of the preamplifier gives it a low sensitivity to humidity on the output terminal and allows the accelerometers to be used without protection in conditions where there is small amounts of condensation.

Where heavy condensation is encountered, the use of moisture impervious cables and sealing will permit operation. Suitable sealants are Dow Corning RTV 738 or similar compounds.

Sound Pressure

The acoustic sensitivity is low, and for most vibration measurements it can be neglected. The vibration signal from the structure-under-test is normally much greater than the signal due to acoustic sensitivity.

Acoustic sensitivity is specified as an equivalent acceleration caused by a 154 dB sound pressure level in the frequency range 2 Hz to 100 Hz, but the specified value is normally valid outside this range.

Electromagnetic Compatibility (EMC)

Susceptibility of DeltaTron® accelerometers to radio-frequency electromagnetic radiation is also low.

The accelerometers are certified (CE) to Standards EN 50081-1 and EN 50082-2 for emission and immunity, respectively.

EN 50081-1 covers:

- Radiated emission from 30 to 1000 MHz
- Conducted emission from 0.15 to 30 MHz

EN 50082-2 covers the effects of:

- Radio frequency fields from 20 to 1000 MHz at a field strength of 3 and 10 V/m with an amplitude modulation of 80%
- Electrostatic discharge at 4 and 8 kV
- Transient bursts at 1 kV
- Magnetic fields from 50 Hz to 20 kHz with a strength of 30 A/m at 50 Hz

Base Strains

These can be introduced into an accelerometer by distortion of the surface to which it is attached.

Base strain sensitivity, which is minimised by the Delta Shear® construction, is specified in $\text{ms}^{-2}/\mu\text{e}$.

Mounting

DeltaTron® accelerometers can be mounted with their main sensitivity axis aligned in any direction.

Recommended Mounting Technique

Fig. 2 shows the recommended mounting method for DeltaTron® accelerometers. Steel Stud YS8321 is a flanged M3 stud which is used with Accelerometer Type 4394. It is available in sets of 25 as order number UA 1221. For the uninsulated miniature accelerometer Type 4397 steel stud YQ2003 is used. For types 4395, 4396, 4398 and 4399, steel stud YQ2962 is used. The accelerometers are screwed, using the stud, onto a clean metal surface meeting the requirements specified in Fig. 3. The optimum torque for tightening the M3 studs is between 0.2 Nm (1.8 lbf.-in) and 0.6 Nm (5.3 lbf.-in). For 10–32 UNF studs, the corresponding values are 0.5 Nm (4.4 lbf.-in) and 3.5 Nm (31 lbf.-in). To avoid possible damage to the ceramic disc, it is important that the maximum torque is not exceeded.

It should be noted when using the recommended technique, that if the

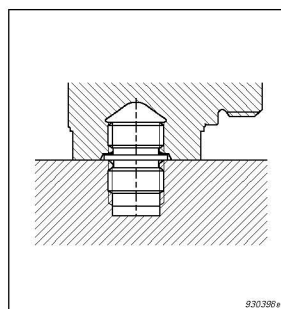


Fig. 2 Recommended mounting technique for Type 4394, using a steel stud YS 8321 (YQ 2003 for uninsulated base, Type 4397)

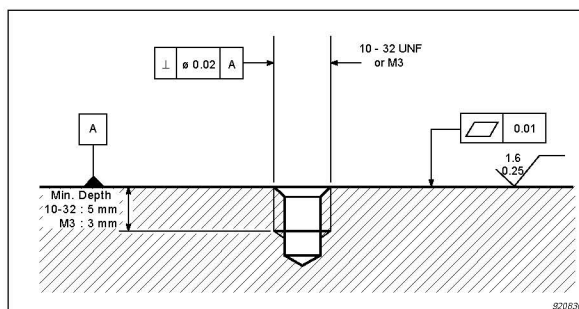


Fig. 3 Recommended tolerances for the mounting surfaces. Dimensions and symbols in accordance with ISO 1101

mounting surface is not perfectly smooth, the application of a thin layer of silicon grease to the base of the accelerometer before screwing it down on the mounting surface will improve the mounting stiffness.

Alternative Mounting Techniques

The section entitled Standard Accessories lists the mounting accessories that are supplied with individual accelerometers.

When mounting techniques other than the recommended one are used, the mounted resonance frequency of the accelerometer will probably be lowered. Most alternative mounting techniques are described in the Brüel & Kjær "Piezoelectric Accelerometers and Vibration Preamplifiers" handbook, where their effects on the frequency response are illustrated.

Connecting Cables

For direct connection to DeltaTron® accelerometers, miniature, double-screened low-noise, single-core, coaxial cables are available. These are a standard 1.2 m long, Teflon-insulated, cables that are supplied fitted with miniature coaxial plugs.

Types 4394 and 4397 require an M3 connector and is supplied with Cable AO 1381 which is fitted with one M3 and one 10-32 UNF connector. Types 4395, 4396, 4398 and 4399 are supplied with Cable AO 1382 which is fitted with two 10-32 UNF connectors. DeltaTron® Charge Converter Type 2646 is supplied without a cable, but AO 0406, a 5 m cable fitted with 10-32 UNF connectors and supplied with a 10-32 UNF to BNC adaptor, is available as an accessory. As an alternative, an AO 1382 cable

can be used. Additional cable lengths and connectors can be ordered.

Note, however, that for many, non-critical applications, lower quality cables or twisted pairs can be used. However, when such cables are used, the EMC certification is not valid.

Details of the accelerometer connections and recommended plug clearances are given in the section entitled Accelerometer Dimensions.

Maximum Cable Length

The maximum output voltage of a DeltaTron® accelerometer depends on the supply current at which it is operating, and on the capacitive load due to the connecting cable.

Fig. 4 shows typical curves for maximum output levels with supply currents of 2 and 20 mA (for distortion $\leq 1\%$). The maximum cable length in metres (L) is given by:

$$L = 75000 \times \frac{I_s}{f \times V_o \times C_m}$$

where:

I_s = supply current [mA]

f = frequency [kHz]

V_o = output voltage [V_{peak}]

C_m = cable capacitance [pF/m]

If the supply current is less than 4 mA, the power consumption of the built-in preamplifier becomes significant and this formula cannot be applied.

Calibration

Factory Calibration

All Brüel & Kjær Accelerometers are thoroughly checked and examined at each stage of manufacture and assembly. Every accelerometer under-

goes an extensive calibration procedure and artificial ageing process to ensure completely predictable performance and stable operation. Accurate numerical details of the calibration are reported on the calibration chart supplied with each transducer (see Fig. 1).

At Brüel & Kjær, piezoelectric accelerometers are calibrated by back-to-back comparison with a primary reference standard accelerometer which is regularly calibrated by laser interferometry at the Danish Primary Laboratory of Acoustics and by both the American National Institute of Standards and Technology and the German Physikalisch-Technische Bundesanstalt. The overall accuracy of the back-to-back comparison is 2% with a 99.9% confidence level (1.6% for a 99% confidence level), while for the interferometry method the accuracy is better than $\pm 0.6\%$ with a 99% confidence level.

Subsequent Calibration

Regular calibration of accelerometers helps maintain confidence in the measurements taken and indicates whether accelerometers have been damaged. Brüel & Kjær manufacture a range of equipment for frequency response, sensitivity and system calibrations, details of which are available in separate Product Data Sheets.

Individual Accelerometers

Dimensions and specifications for the accelerometers can be found in the schemes given towards the end of this Data Sheet.

Miniature Accelerometer Type 4394 and 4397

These accelerometers are suitable for measurements on lightweight structures where relatively high-level, high-frequency vibrations are encountered.

Shock and Vibration Accelerometer Type 4395 and 4398

Type 4395 and 4398 accelerometers are designed for the measurement of relatively high levels of continuous vibration and mechanical shock up to 7500 ms^{-2} .

General Purpose Accelerometer Type 4396 and 4399

These accelerometers are intended to be used for general purpose vibration measurements.

Charge Converter Type 2646

Charge Converter Type 2646 is a signal conditioner designed for use with standard piezoelectric accelerometers or other piezoelectric transducers. It requires an external, constant-current power supply, and its function is to convert a charge input to a voltage-modulation of the constant-current power supply lines.

Type 2646 is also designed to withstand severe environments so that it can be mounted directly onto transducers with 10–32 UNF top connectors, or located in close proximity to transducers with side connectors.

For miniature size and low weight, Type 2646 has thick film electronics that are double sealed in a silicone elastomer compound and contained in a titanium housing. Type 2646 is supplied without a cable, however there is a space in the case for storing a cable. Cables AO0406 and AO 1382 are available as accessories.

Full specifications are given on the last page of this Data Sheet, and the

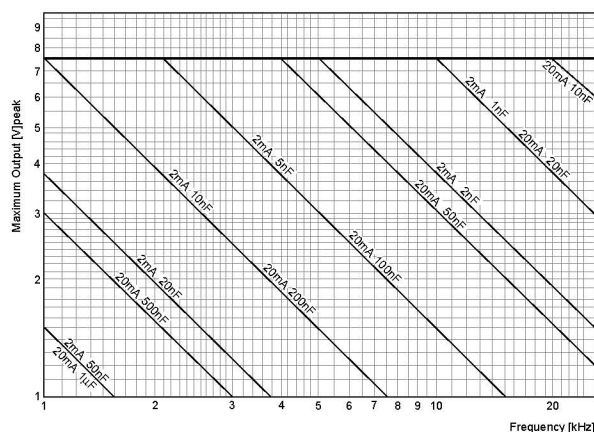


Fig.4 Typical curves for maximum output level of DeltaTron® accelerometers, showing maximum capacitive load over the recommended current supply range

extensive range of accelerometers that are suitable for use with Type 2646 are described in the Brüel & Kjær Data Sheet "Piezoelectric Accelerometers" (BP 0196).

Power Supply Adaptor ZG 0328

The Power Supply Adaptor ZG0328 is designed to connect directly into the 7-pin microphone (preamplifier) socket that is provided on many Brüel & Kjær instruments (except Types 2230 to 2235). The function of ZG0328 is to adapt the socket for direct use with DeltaTron® accelerometers.

From the power available in the microphone socket, ZG0328 provides the constant-current drive for the accelerometer and the signal input to the microphone socket.

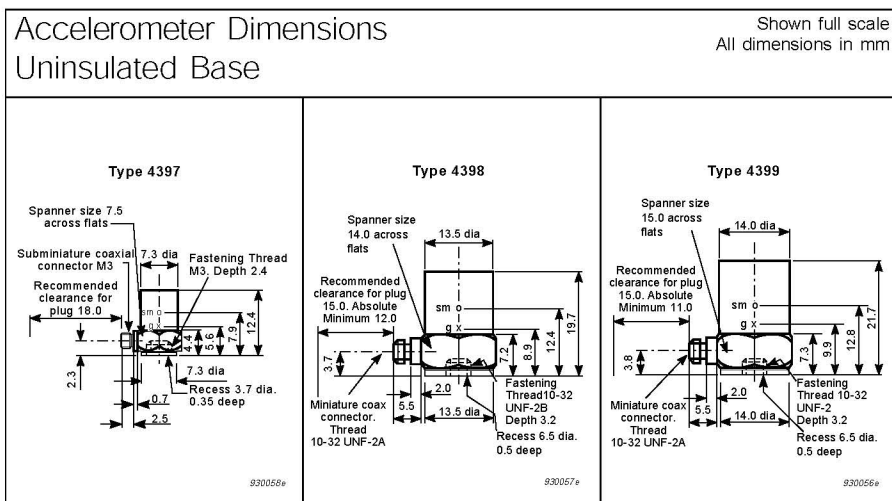
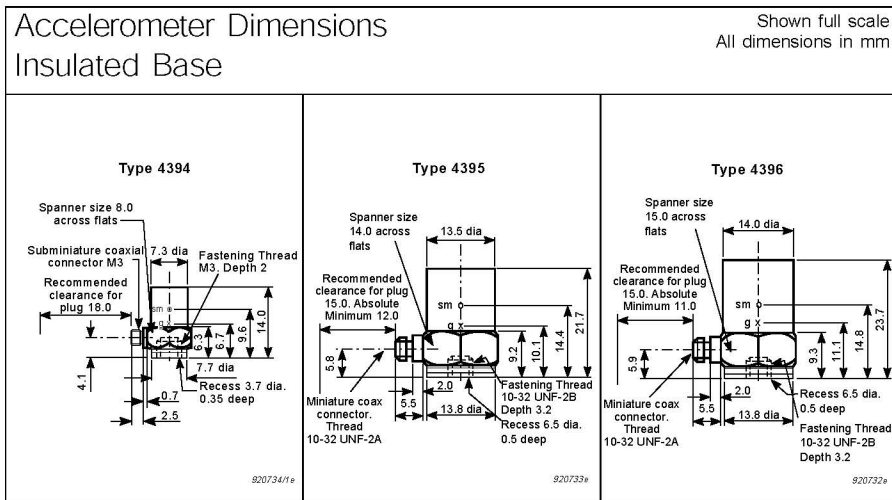
How to Order Accelerometers

Accelerometers are available as standard or as a **Set**.

As standard an accelerometer is supplied with a cable and mounting studs (for example Order No. **4395**).

An **Accelerometer Set** (suffix S after the type number) consists of a single accelerometer complete with cable and accessories in a case.

A complete list of the accessories supplied with each set or standard version, is given in the section on Standard Accessories. Additional accessories are available on separate order.

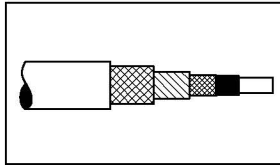


Standard Accessories

B&K Part Number	Standard Accessories	4394		4395		4396		4397		4398		4399	
		S		S		S		S		S		S	
AO 1381	Teflon low-noise cable, double screened AC 0104 (\varnothing 1.6 mm). Fitted with one 10–32 UNF and one M3 connector. Length 1.2 m	1	1					1	1				
AO 1382	Teflon low-noise cable, double screened AC 0104 (\varnothing 1.6 mm). Fitted with two 10–32 UNF connectors. Length 1.2 m			1	1	1	1			1	1	1	1
JJ 0032	Extension connector for cables fitted with 10–32 UNF connectors	3		3		3		3		3		3	
JP 0145	10–32 UNF to BNC adaptor	1		1		1		1		1		1	
YS 8321	Steel stud M3/M3 (UA 1221 is a set of 25 of these studs)	3	3										
YQ 2003	Steel Stud M3, 5 mm long							3	3				
YQ 2960	10–32 UNF threaded steel stud. Length 0.5 in.			2		2				2		2	
YQ 2962	10–32 UNF threaded steel stud. Length 0.3 in.			3	1	3	1			3	1	3	1
YM 0414	10–32 UNF nut			1		1				1		1	
QA 0041	Tap for M3 thread	1						1					
QA 0029	Tap for 10–32 UNF thread			1		1				1		1	
DB 0757	Cement stud M3. Diameter 8 mm	1						1					
DB 0756	Cement stud 10–32 UNF. Diameter 14 mm			1		1				1		1	
QA 0042	Hexagonal key for M3 studs	1						1					
QA 0013	Hexagonal key for 10–32 UNF studs			1		1				1		1	
YJ 0216	Beeswax for mounting	1		1		1		1		1		1	
UA 0642	Mounting magnet with 10–32 UNF stud			1		1				1		1	
YO 0073	25 × adhesive mounting disc. Diameter 5.5 mm	1						1					
QS 0007	Tube of cyanoacrylate adhesive	1						1					
BC 0200	Individual calibration chart	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	Accessory set included with S version	UA 1218		UA 1219		UA 1219		UA 1218		UA 1219		UA 1219	

Table 1 The accelerometers can be ordered as standard version (for example: Order No. 4395) or as an "S" version (for example: Order No. 4395 S). This table gives details about which accessories are supplied with accelerometers in the standard version and which are supplied with the "S" version

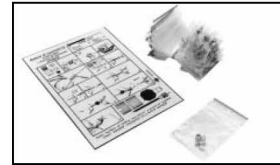
Additional Accessories Available



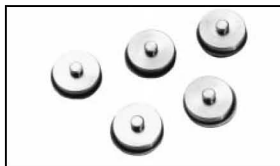
AC0104. Teflon insulated double screened low-noise cable (illustrated).
AC0005. Teflon insulated super low-noise cable.
AC0200. Reinforced double screened version of AC0005.
AC0208. PVC coated cable
 The EMC certification (CE) is only valid for AC0104.



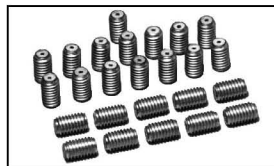
AO0406. Teflon insulated double screened cable AC0104 fitted with 10-32 UNF connectors and supplied with a 10-32 UNF to BNC adaptor (JP0145). Length 5 m.



UA0130. Set of 25 plugs JP0012 for cable AC0104 and AC0005.
UA0730. Set of 25 plugs JP0056 for cable AC0200. For mounting the plugs, the assembly tool QA0035 is required.



UA0643. Set of 5 10-32 UNF mounting magnets UA0642. Includes PTFE self adhesive discs for electrical insulation.



UA0186. Set of 25 extension connectors JJ0032 for miniature cables with plugs JP0012 and JP0056.



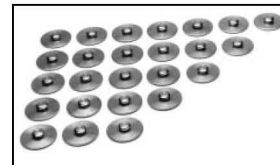
UA0553. Set of 5 electrically insulated Mechanical Filters UA0559, plus a tommy bar for mounting.



JP0145. 10-32 UNF to BNC adaptor for connection of cables with miniature coaxial plugs JP0012 and JP0056.



QA0035. Assembly tool for mounting miniature plugs on accelerometer cables.



UA0866. Set of 25 10-32 UNF cement studs DB0756.
UA0867. Set of 25 M3 cement studs DB0757.






UA1221. Set of 25 steel studs YS8321.






UA0125. Set of 10 insulating studs YP0150, 10 steel studs YQ2960, 10 nuts YM0414, 10 mica washers YO0534 plus 10-32 UNF tap and hexagonal key for 10-32 UNF studs.

Accelerometer Specifications Insulated Base

				
		Type 4394	Type 4395	Type 4396
Dynamic				
Mounted Resonance Frequency, typical	kHz	52	37	28
Transverse Resonance Frequency, typical	kHz	15	13	9
Electrical				
Case Insulation to Ground	MΩ	> 10		
Environmental				
Base Strain Sensitivity, typical	ms ⁻² (g)/με	0.005 (0.0005)	0.01 (0.001)	0.005 (0.0005)
Physical				
Weight	gram (oz)	2.9 (0.10)	12.9 (0.46)	18.2 (0.64)
Height	mm (in)	14.0 (0.55)	21.7 (0.85)	23.7 (0.93)
Spanner Size	mm (in)	8.0 (0.31)	14.0 (0.55)	15.0 (0.59)

Accelerometer Specifications Uninsulated Base

				
		Type 4397	Type 4398	Type 4399
Dynamic				
Mounted Resonance Frequency, typical	kHz	53	38	29
Transverse Resonance Frequency, typical	kHz	17	14	10
Environmental				
Base Strain Sensitivity, typical	ms ⁻² (g)/με	0.005 (0.0005)	0.02 (0.002)	0.01 (0.001)
Physical				
Weight	gram (oz.)	2.4 (0.09)	11.8 (0.42)	17.1 (0.60)
Height	mm (in)	12.4 (0.49)	19.7 (0.77)	21.7 (0.85)
Spanner Size	mm (in)	7.5 (0.30)	14.0 (0.55)	15.0 (0.59)

Common Specifications for Both Types of Accelerometers

Dynamic		Type 4394 Type 4397	Type 4395 Type 4398	Type 4396 Type 4399
Sensitivity (axial) at 159.2 Hz, 100 ms ⁻² (10.2 g), 25°C (77°F), 4 mA mV/ms ⁻² (g)		1.00 (9.807) ± 2 %		10.0 (98.07) ± 2 %
Measuring Range (peak), typical	temperature < 100°C (212°F)	±7500 (765)		±750 (76)
	temperature < 125°C (257°F)	±5000 (510)		±500 (51)
Frequency Range (±10%), typical [*]		1 to 25000	0.3 to 18000	1 to 14000
Maximum Transverse Response		< 4		

^{*} **Note:** The frequency range from 10 Hz to 10 kHz is measured individually and shown on the calibration chart supplied. The expanded uncertainty on this measurement is: 1.0% from 10 Hz to 2 kHz and 2.0% from 2 kHz to 10 kHz at 2σ (i.e. expanded uncertainty using a coverage factor of 2)

Common Specifications for Both Types of Accelerometers (Cont.)

Electrical

Constant Current Supply	temperature <100°C (212°F)	mA	+2 to +20		
	temperature <125°C (257°F)	mA	+2 to +10	+2 to +20	
Supply Voltage, unloaded	for full specification	V DC	+24 to +30		
	minimum (reduced specification)	V DC	+18		
Output Impedance		Ω	<100		
Bias Voltage	at 25°C (77°F), 4 mA	V	12 ±0.5		
	full temperature and current range	V	8 to 15		
Residual Noise, typical	from 1 to 22000 Hz	μV	<25	<15	<40
	equivalent acceleration	ms ⁻² (g)	<0.025 (0.0026)	<0.015 (0.0015)	<0.004 (0.0004)
Polarity (acceleration directed from base into body)			Positive		
Recovery time from Overload (2×maximum level)		μs	<20	<15	<25


Environmental

Maximum Non-destructive Shock (peak)	Axial	ms ⁻² (g)	100000 (10200)	50000 (5100)	20000 (2040)
	Transverse	ms ⁻² (g)	50000 (5100)	20000 (2040)	10000 (1020)
Temperature Range		°C (°F)	-50 to +125 (-58 to +257)		
Humidity			Welded, sealed		
Temperature Transient Sensitivity, typical		ms ⁻² /°C (g/°F)	2 (0.1)	0.2 (0.01)	0.1 (0.006)
Magnetic Sensitivity (50 Hz, 0.038T), typical		ms ⁻² (g)/T	10 (1)	20 (2)	5 (0.5)
Acoustic Sensitivity (154 dB SPL), typical		ms ⁻² (g)	0.01 (0.001)	0.005 (0.0005)	0.002 (0.0002)

Physical

Construction		Delta Shear			
Piezoelectric Material		PZ 23			
Case Material	Titanium	ASTM Gr. 2			
Connector	Coaxial	M3 miniature	10–32 UNF		
Mounting Thread	Tapped center-hole	M3	10–32 UNF		
Mounting Torque	Nm (lb.in)	0.2 to 0.6 (1.8 to 5.3)	0.5 to 3.5 (4.4 to 31)		

Compliance with Standards

	CE-mark indicates compliance with: EMC Directive				
Safety	EN 61010–1 and IEC 1010–1: Safety requirements for electrical equipment for measurement, control and laboratory use.				
EMC Emission	EN 50081–1: Generic emission standard. Part 1: Residential, commercial and light industry. EN 50081–2: Generic emission standard. Part 2: Industrial environment. CISPR 22: Radio disturbance characteristics of information technology equipment. Class B Limits. FCC Class B limits				
EMC Immunity	EN 50082–1: Generic immunity standard. Part 1: Residential, commercial and light industry. EN 50082–2: Generic immunity standard. Part 2: Industrial environment. Note: The above is guaranteed using accessories listed in this Product Data sheet only.				
Temperature	IEC 68–2–1 & IEC 68–2–2: Environmental Testing. Cold and Dry Heat. Operating Temperature: –50 to +125°C (–58 to +257°F)				
Humidity	IEC 68–2–3: 90% RH (non-condensing at 40°C (104°F))				

Specifications for DeltaTron® Charge Converter Type 2646

Charge Input INPUT CONNECTOR:

10–32UNF coaxial. Used for direct attachment of 2646 to an accelerometer that has a top mounted connector. Also accepts a miniature accelerometer cable for side-by-side mounting with an accelerometer

MAXIMUM SINUSOIDAL INPUT:

7.5×10^3 pC peak at temperatures between –50 and +100°C (–58 and +212°F), decreasing to 5×10^3 pC at +125°C (257°F)

INPUT CAPACITANCE: >200 nF

Amplifier Response

SENSITIVITY:

1 mV/pC $\pm 1\%$ at 25°C (77°F) with a constant current of 4 mA

FREQUENCY RANGE:

0.3 Hz to 100 kHz (–10% limits)

NOISE RMS (referred to input terminated with a transducer capacitance of 1 nF)

Inherent, in 1 Hz to 22 kHz: $<15 \times 10^{-3}$ pC
Density at 10 Hz: 0.80×10^{-3} pC/√Hz
100 Hz: 0.28×10^{-3} pC/√Hz
1 kHz: 0.12×10^{-3} pC/√Hz
10 kHz: 0.05×10^{-3} pC/√Hz

Electromagnetic: 5pC/T (50 Hz, 0.038 T)

RECOVERY TIME (2XFS): <15 μs

Output

OUTPUT CONNECTOR:

10–32UNF coaxial. Used for both signal output and power input through a single coaxial cable

PHASE (output referred to input): Inverted

OUTPUT IMPEDANCE: <100 Ω

Power Supply

CONSTANT CURRENT: +2 to +20 mA

UNLOADED SUPPLY VOLTAGE:

+24 to +30 V (minimum: +18 V with reduced specification)

BIAS VOLTAGE:

+12 ± 0.5 V at 4 mA and 25°C. For full temperature and current range, the bias voltage range is +8 to +15 V

Environmental

TEMPERATURE RANGE:

–50 to +125°C (–58 to +257°F). Sensitivity temperature coefficient is within $\pm 0.03\%/^{\circ}\text{C}$ ($\pm 0.016\%/^{\circ}\text{F}$)

HUMIDITY:

0 to 90%RH (non-condensing) without extra sealing

VIBRATION INDUCED NOISE:

1×10^{-3} pC/ms² (0.01 pC/g)

COMPLIANCE WITH STANDARDS:

CE	CE-mark indicates compliance with EMC Directive.
Safety	EN 61010–1 and IEC 1010: Safety requirements for electrical equipment for measurement, control and laboratory use.
EMC Emission	EN 50081–1: Generic emission standard. Part 1: Residential, commercial and light industry. EN 50081–2: Generic emission standard. Part 2: Industrial environment. CISPR 22: Radio disturbance characteristics of information technology equipment. Class B limits. FCC Rules, Part 15: Class B limits.
EMC Immunity	EN 50082–1: Generic immunity standard. Part 1: Residential, commercial and light industry. EN 50082–2: Generic immunity standard. Part 2: Industrial environment. Note 1: The above is guaranteed using accessories listed in this Product Data sheet only. Note 2: Sensitivity to RF common-mode, injected to signal line (in accordance with EN 50082–2) < 70 μV (13 dB), with the converter connected directly to the accelerometer < 900 μV (35 dB), with a cable between the converter and the accelerometer
Temperature	IEC 68–2–1 & IEC 68–2–2: Environmental Testing, Cold and Dry Heat. Operating Temperature: –50 to +125°C (–58 to +257°F)
Humidity	IEC 68–2–3: Damp Heat: 90% RH (non-condensing at 40°C (104°F))

MAXIMUM PHYSICAL SHOCK:

50 km/s² (5100 g) peak

MAXIMUM INPUT WITHOUT DAMAGE:

50000 pC

CASE MATERIAL: Titanium ASTM Gr. 2

Dimensions and Weight

Diameter: 13.5 mm (0.53 in)

Height: 16.0 mm (0.64 in)


Weight: 5.3 g (0.19 oz.)

Note: All values are typical at 25°C (77°F), unless measurement uncertainty is specified

Ordering Information

<p>Type 2646 DeltaTron® Charge Converter Includes the following accessories: JJ0032: Cable Extension Connector (10–32UNF) 2 × YJ0606: O-Ring</p>		
---	--	--

Specifications for DeltaTron[®] Power Supply ZG0328

 <p>SHORT-CIRCUIT CURRENT: 3 ± 0.9 mA UNLOADED SUPPLY VOLTAGE: 27 V DYNAMIC IMPEDANCE: >100 kΩ NOISE RMS (inherent, Lin. 1 Hz to 22 kHz): <50 nA OUTPUT: Transducer signal connected to pin 4 of the microphone socket TRANSDUCER CONNECTOR: BNC SUPPLY CONNECTOR: Standard Brüel & Kjær 7-pin microphone plug</p> <p>Environmental TEMPERATURE RANGE: -10 to $+55^{\circ}\text{C}$ ($+14$ to $+131^{\circ}\text{F}$) HUMIDITY: 0 to 90% RH (non-condensing) CASE MATERIAL: Nickel-coated Brass</p> <p>Dimensions and Weight Diameter: 26.5 mm (1.04 in.) Length: 52.5 mm (2.07 in.) Weight: 48.5 g (1.707 oz.)</p> <p>Note: All values are typical at 25°C (77°F), unless measurement uncertainty is specified.</p>	<p>COMPLIANCE WITH STANDARDS:</p> <table border="1"> <tr> <td>CE</td><td>CE-mark indicates compliance with EMC Directive.</td></tr> <tr> <td>Safety</td><td>EN 61010–1 and IEC 1010–1: Safety requirements for electrical equipment for measurement, control and laboratory use.</td></tr> <tr> <td>EMC Emission</td><td>EN 50081–1: Generic emission standard. Part 1: Residential, commercial and light industry. EN 50081–2: Generic emission standard. Part 2: Industrial environment. CISPR 22: Radio disturbance characteristics of information technology equipment. Class B Limits. FCC Rules, Part 15: Class B limits.</td></tr> <tr> <td>EMC Immunity</td><td>EN 50082–1: Generic immunity standard. Part 1: Residential, commercial and light industry. EN 50082–2: Generic immunity standard. Part 2: Industrial environment. Note 1: The above is guaranteed using accessories listed in this Product Data sheet only. Note 2: Sensitivity to magnetic fields (30 A/m, 50 Hz): 80 nA</td></tr> <tr> <td>Temperature</td><td>IEC 68–2–1 & IEC 68–2–2: Environmental Testing. Cold and Dry Heat. Operating Temperature: -10 to $+55^{\circ}\text{C}$ ($+14$ to $+131^{\circ}\text{F}$) Storage Temperature: -25 to $+70^{\circ}\text{C}$ ($+13$ to $+158^{\circ}\text{F}$)</td></tr> <tr> <td>Humidity</td><td>IEC 68–2–3: Damp Heat: 90% RH (non-condensing at 40°C (104°F))</td></tr> <tr> <td>Mechanical</td><td>Non-operating IEC 68–2–6: Vibration: $0.3 \text{ mm}, 20 \text{ m/s}^2$, 10–500 Hz IEC 68–2–27: Shock: 1000 m/s^2 IEC 68–2–29: Bump: 4000 bumps at 400 m/s^2</td></tr> </table>	CE	CE-mark indicates compliance with EMC Directive.	Safety	EN 61010–1 and IEC 1010–1: Safety requirements for electrical equipment for measurement, control and laboratory use.	EMC Emission	EN 50081–1: Generic emission standard. Part 1: Residential, commercial and light industry. EN 50081–2: Generic emission standard. Part 2: Industrial environment. CISPR 22: Radio disturbance characteristics of information technology equipment. Class B Limits. FCC Rules, Part 15: Class B limits.	EMC Immunity	EN 50082–1: Generic immunity standard. Part 1: Residential, commercial and light industry. EN 50082–2: Generic immunity standard. Part 2: Industrial environment. Note 1: The above is guaranteed using accessories listed in this Product Data sheet only. Note 2: Sensitivity to magnetic fields (30 A/m, 50 Hz): 80 nA	Temperature	IEC 68–2–1 & IEC 68–2–2: Environmental Testing. Cold and Dry Heat. Operating Temperature: -10 to $+55^{\circ}\text{C}$ ($+14$ to $+131^{\circ}\text{F}$) Storage Temperature: -25 to $+70^{\circ}\text{C}$ ($+13$ to $+158^{\circ}\text{F}$)	Humidity	IEC 68–2–3: Damp Heat: 90% RH (non-condensing at 40°C (104°F))	Mechanical	Non-operating IEC 68–2–6: Vibration: $0.3 \text{ mm}, 20 \text{ m/s}^2$, 10–500 Hz IEC 68–2–27: Shock: 1000 m/s^2 IEC 68–2–29: Bump: 4000 bumps at 400 m/s^2
CE	CE-mark indicates compliance with EMC Directive.														
Safety	EN 61010–1 and IEC 1010–1: Safety requirements for electrical equipment for measurement, control and laboratory use.														
EMC Emission	EN 50081–1: Generic emission standard. Part 1: Residential, commercial and light industry. EN 50081–2: Generic emission standard. Part 2: Industrial environment. CISPR 22: Radio disturbance characteristics of information technology equipment. Class B Limits. FCC Rules, Part 15: Class B limits.														
EMC Immunity	EN 50082–1: Generic immunity standard. Part 1: Residential, commercial and light industry. EN 50082–2: Generic immunity standard. Part 2: Industrial environment. Note 1: The above is guaranteed using accessories listed in this Product Data sheet only. Note 2: Sensitivity to magnetic fields (30 A/m, 50 Hz): 80 nA														
Temperature	IEC 68–2–1 & IEC 68–2–2: Environmental Testing. Cold and Dry Heat. Operating Temperature: -10 to $+55^{\circ}\text{C}$ ($+14$ to $+131^{\circ}\text{F}$) Storage Temperature: -25 to $+70^{\circ}\text{C}$ ($+13$ to $+158^{\circ}\text{F}$)														
Humidity	IEC 68–2–3: Damp Heat: 90% RH (non-condensing at 40°C (104°F))														
Mechanical	Non-operating IEC 68–2–6: Vibration: $0.3 \text{ mm}, 20 \text{ m/s}^2$, 10–500 Hz IEC 68–2–27: Shock: 1000 m/s^2 IEC 68–2–29: Bump: 4000 bumps at 400 m/s^2														

Ordering Information

ZG 0328 DeltaTron [®] Power Supply Includes the following accessories: JP 0145: 10–32 UNF to BNC adaptor		
--	--	--

Brüel & Kjær reserves the right to change specifications and accessories without notice.

B.3 Accelerometri Brüel & Kjær, Tipo 4384

Piezoelectric charge accelerometer, side connector, incl. cable - Brüel & Kjær



4384 - Piezoelectric charge accelerometer, side connector, incl. cable



Overview	Specifications	Accessori	Services
Frequenza	0.1 - 12600 Hz		
Sensibilità	10 pC/g		
Temperatura	-74 - 250 C		
Rumore residuo nel campo di frequenza (rms) ±	0.24 mg		
Massimo livello di lavoro (picco)	6000 g		
Massimo livello shock (picco-picco)	20000 g		
peso	11 grammi		
connettore elettrico	10-32 UNF		
montaggio	Stud		
accessori inclusi	AO 0038		
Clip/dadi/viti compresi	YQ 2960		
output	Charge-PE		
Unigain	Yes		
triassiale	No		
TEDS	No		
Range dinamico			
Frequenza di risonanza	42 kHz		

B.4 LMS SCADAS Mobile SCM01

LMS product information

LMS SCADAS Mobile

LMS/SCM/SCM01/160507



One Slot Mainframe [SCM01]

Frame

The SCM01 is a very compact front-end that accommodates two tachometer inputs, two generator outputs and up to 8 input channels. Its small size, low weight and battery operation makes it the ideal portable sound and vibration analyzer.

SCADAS Mobile uses a high-speed serial Ethernet interface to the host. With a maximum throughput of over 3.8 Msamples/sec, the SCADAS Mobile offers full bandwidth throughput to the host for all channels.

Measure anywhere

Because of its robustness, exceptional environmental specifications, flexible power requirements and wide operating temperature range, the SCADAS Mobile can be employed in virtually any mobile test campaign.

Ultra quiet, no fan cooling

Having no cooling fan, the SCADAS Mobile is the ideal system for critical acoustic measurements. The combination of three advanced techniques eliminates fans:

- The input modules are based on low power components, reducing power consumption to less than 0.5W per channel.
- Heat is dissipated via an integrated cooling block on the rear of the frame. The heat from the printed circuit boards is transferred via the back plane connectors and via cold walls.
- An intelligent power management system, monitoring system activity, sets SCADAS Mobile in power-down mode when no measurements are done.

Battery operation

The SCM01 includes a built-in battery for mains independent operation of 3 hours. The battery is charged automatically when external power is connected.

Features and benefits

- Ultra compact size
- Rugged housing for rough environments
- Wide operational temperature range from -10°C to +55°C
- 3.8 Msamples/second throughput via Ethernet interface
- Plug&Play operation
- Built-in battery for 3 hours mains independent operation
- Ultra quiet, no fan cooling
- Accommodates up to 8 input channels
- Wide range DC power supply
- On board dual tachometer input
- On board dual signal generator output

11 © 2007 LMS International
Specification subject to change without notice



Specifications SCM01

Number of slots:

SCM01 has two slots; one slot is reserved for the system controller

Power input:

Auto ranging DC input from 9VDC to 36VDC; AC operation uses an external mains adapter

Power management:

ON/OFF switch, automatic sleep mode

Power consumption:

15W maximum

Internal battery:

Rechargeable Li-ion battery; rating 21.6V-1.6Ah; charge time is five hours @ 0.5A when the SCM01 is switched on, and two hours @ 1A when it is switched off; the battery is charged automatically when external power is applied; charging during measurements limits temperature range to 40°C; charging can be disabled; autonomous operation time is 3 hours minimum.

Cooling:

Heat conduction via printed circuit board connectors; sides of the printed circuit boards are cooled via cold walls connected to cooling block at the rear

Tacho input:

- Dual tacho input to support signature or order tracking applications
- Tacho frequency from 5Hz to 17kHz
- Input range from 200mV to 40V

Signal generator:

- Two short circuit protected single ended outputs via grounded SMB socket
- 24-bit bit-stream DAC
- Dynamic range is 110dB referred to maximum output signal for 20kHz bandwidth
- Interpolation filters are a combination of analog reconstruction filters and digital interpolation filters with noise shaping
- Flatness up to 20kHz within 0.1dB

Random output

Uncorrelated base-band noise with crest factor of 3.5 in continuous or burst mode

Sine output

Sine with amplitude and phase control; swept sine with amplitude and sweep speed control

Output level

Maximum output voltage of $\pm 10V$

Ethernet interface:

Ethernet interface with 100Mbit per second transfer speed gives a maximum throughput rate of 3.8Msamples of 24 bit per second

Dimensions:

Width: 203 mm
Height: 58 mm
Depth: 260 mm

Weight:

2.5 kg.

Temperature:

Operating: -10°C to +55°C
Storage: -20°C to +70°C

Relative humidity:

Up to 95% non-condensing

Vibration MIL-STD-810F:

20-2000Hz (random): 7.7g_{rms}

Shock MIL-STD-810F:

60g_{pk} applying an 11ms sawtooth shock pulse; 3 shocks per direction

Ordering information:

SCM01:	SCADAS Mobile mainframe with one free slot, including battery, AC/DC power adapter, DC power cable, Ethernet Cardbus host interface and a 2m. UTP cable
SCM-OPTION02:	GPS option, including active antenna



LMS SCADAS Mobile is a product of LMS Instruments

The SCM01 mainframe complies with the standards:
EN61010
EN50081-1
EN50082-1



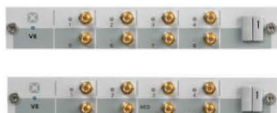
B.5 Modulo di Ingresso a 8 canali

LMS product information

LMS SCADAS Mobile

LMS/SCM/V8/160607

Eight-channel Input Module [V8 / VS8]



V8 input module

The V8 is an LMS SCADAS Mobile input module, supporting full voltage and ICP[®] signal conditioning and signal processing for eight channels. The V8 offers the unique combination of ultra-low power consumption with high performance 24-bits analog to digital conversion.

VS8 has the same functionality as V8, with additional support for AES/EBU or SPDIF digital audio sources.

Signal conditioning

Each input channel has a voltage amplifier with an input range from $\pm 100\text{mV}$ to $\pm 12\text{V}$, and includes ICP power supply to the transducers. The V8 has an ICP cable check circuit to detect an open loop in the sensor cable; errors are indicated through a front-panel LED for optimum user feedback and simultaneously transferred to the host as well. For acoustic applications, an additional 7Hz AC coupling reduces low frequency signals that might otherwise overload the input amplifier. The overload LED indicates both analog overloads, detected at the input amplifier, and digital overloads, detected by digital signal processor. The V8 supports smart sensors according to IEEE 1451.4. Without changing cables, LMS SCADAS Mobile can read the Transducer Electronic Data Sheet (TEDS) with essential information including sensor type, sensitivity, calibration date, coordinates etc.

Analog to digital conversion

The V8 uses low-power high performance 24-bit sigma-delta analog to digital converters. A 4-pole analog anti-alias filter precedes each ADC. Running at 102.4kHz, the V8 supports both vibration and acoustic applications. A wide range of digital decimation filters reduces bandwidth in steps of 2 and 2.5.

Signal processing

The V8 is equipped with a low-power high-performance DSP56311 and 512Kx24-bit memory for digital filtering, calibration, overload handling, real-time order tracking and one-third octave filtering, independent of the number of channels.

Features and benefits

- 8 input channels via SMB connectors
- Smart sensor support
- Analog anti-alias filter
- Analog and digital overload detection with LED indication on front-panel
- 24-bit analog to digital conversion with 46kHz bandwidth maximum
- Built-in calibration for improved specifications over a longer period
- Real-time order tracking with overlap
- Real time $1/3^{rd}$ octave analysis
- Time domain A-weighting filter
- VS8: additional support of AES/EBU and SPDIF digital audio formats for all standard audio sample rates

© 2007 LMS International
Specification subject to change without notice.



Specifications V8 and VS8

Input function:

Single ended voltage input via grounded SMB socket

Input voltage:

$\pm 100\text{mV}$, $\pm 316\text{mV}$, $\pm 1\text{V}$, 3.16V , $\pm 12\text{V}$

Maximum input voltage:

28Vrms continuously

Input impedance:

1M Ω /50pF

Input coupling:

DC, AC, ICP in single ended mode

AC coupling:

0.48Hz $\pm 6\%$, 7Hz $\pm 2\%$

Supply for ICP sensors:

2.8mA $\pm 10\%$ from 28V source

ICP cable check:

Checking the sensor bias voltage continuously for open loop and short circuit with indication by LED in the front panel

Overload detection and indication:

Analog overload detection at the input is combined with digital overload detection after the ADC; overloads are indicated on the front panel LED and transmitted to the host

Digital audio interface (VS8):

Channel 7 and 8 can be set to either analog or digital mode for support of AES/EBU and SPDIF formats (one stereo channel) with HMS data; accurate sample rate conversion provides an alias suppression of 125dB; all standard audio sample rates (32kHz, 44.1kHz, 48kHz, 96kHz) are supported

Dynamic range

Input range	Signal to Noise Ratio	Spurious Free Floor
12V	105dB	-138dB
3.16V	105dB	-138dB
1V	105dB	-138dB
316mV	100dB	-135dB
100mV	90dB	-125dB

Overall dynamic range with gain: 165dB

Crosstalk:

Between any two channels: -116dB typical, independent of range settings

Accuracy (102.4kHz sample rate):

At 1kHz better than $\pm 0.2\%$ between 5°C and 40°C

Residual Offset (102.4kHz sample rate):

$< \pm 0.1\%$ between 5°C and 40°C

Calibration:

Factory gain & offset calibration factors are stored in non-volatile RAM

Analog anti-alias filter:

4-pole Equal Time Delay filter with 80kHz cut-off frequency and 0.01dB flatness

Analog to digital conversion:

24-bit $\Sigma\Delta$ ADC with a maximum sampling frequency of 102.4kHz; 150dB/oct digital filter with 100dB alias protection provides a useful bandwidth of 46kHz

Total Harmonic Distortion:

Better than -100dB @ 3dB below full scale

Smart sensor interface:

Full support of IEEE 1451.4 smart sensors to read out Transducer Electronic Data Sheet (TEDS)

Phase match:

Better than 0.2° @ 10kHz with 12V input range

DSP section:

DSP 56311 with 512Kx24-bit SRAM

Decimation filter

Reduces bandwidth prior to signal processing; bandwidth can be down-sampled in steps of 2 and 2.5.

Signal processing

1. Fixed sampling:

Continuous time data output; bandwidth selection via the decimation filters, including support for multiple sample rates

2. Order tracking:

Order tracking processing with up to 10kHz order frequency

3. Octave filters

Time domain third octave filters with maximum band of 20kHz according to ANSI S1.11-2004 class 1 and IEC 61260:1995 class 1; time domain A-weighting according to ANSI S1.42 can be switched on or off

Dimensions:

One 20 mm high SCADAS Mobile slot

Power consumption:

During normal operation, no overload and ICP supply switched on: 3.8W



LMS SCADAS Mobile is a product of LMS Instruments

When installed in SCM01 or SCM05, V8 and VS8 comply with the standards:	CE
EN61010	
EN50081-1	
EN50082-1	

B.6 Telecamera veloce: Fastcam-pci della Photron

La telecamera veloce utilizzata per le prove è il modello fastcam-pci della Photron (Fig. B.1).



Fig. B.1

L'ottica utilizzata è riportata in Fig. B.2.



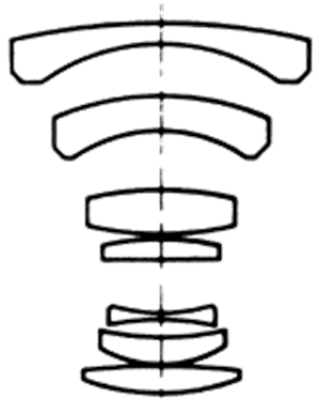
Fig. B.2

Le specifiche complete della telecamera in oggetto sono riportate nella seguente tabella riassuntiva (Tab. B.1). Le caratteristiche del gruppo ottico sono riportate nella .

Table1: Overall Functions Specification

Lens mount	C mount	
Imaging sensor	Progressive scan 1/3-inch CCD, square pixels	
Recording media	IC memory (SD-RAM)	
Recording capacity	128MB: 543 full frames, 2.2 seconds 256MB: 1,087 full frames, 4.3 seconds 384MB: 1,631 full frames, 6.5 seconds 512MB: 2,175 full frames, 8.7 seconds	
Framing rates	Full frame:	30, 60, 125, 250 fps
	Partial frame:	500, 1000, 2000, 3000, 5000, 10000 fps
	Frame rate availability dependant on model	
Pixel resolution	Full frame:	512 x 480 pixels
	Partial frame:	512 x 240; 256 x 240; 256 x 120 pixels 128 x 120; 128 x 80; 128 x 34 pixels
	Note: Pixel resolution depends on framing rate (see Table 3).	
Grayscale	Monochrome: 8 bits (256 steps)	
	Color: R, G, B 8 bits each (24 bits color, 256 steps)	
Playback rates	1, 2, 4, 8, 15, 30 fps	
Electronic shutter	1/frame rate; 1/500; 1/1000; 1/2000; 1/3000; 1/5000; 1/10000; 1/20000; 1/40000; 1/65000; 1/80000; 1/100000; 1/120000 second	
	Note: Shutter speed availability depends on framing rate (see Table 4).	
Trigger input (TTL)	TTL +5 V positive going	
Trigger input	(Contact) Switch contact Sync output	
Sync Output	Vertical sync signal (master) to drive other FASTCAM-PCI slaves boards (Negative 3.3 Vp-p)	
Sync input	Vertical sync signal (negative 3.3 Vp-p)	
Output signal 1	Vertical sync output+5V TTL, negative	
Output signal 2	Asynchronous random reset timing signal +5V TTL, positive	
Power	From the PCI bus (+3.3V; +5.0V; -12V)	
Ambient temperature	0 to 35 degrees Celsius (32 to 95 F), no condensation	
Power consumption	+3.3 V: 2 A; +5.0 V: 2 A; -12 V: 0.5 A (32.6 watts)	
Dimensions	Camera head: 160(6.3") W x 330(13")D x 180(7.1")H mm	
	PCI board: 312(12.6") W x 106(4.2")H x 16(0.6")T mm (PCI full size standard)	
Weight	Camera head:	1.1 kg (2.4 lbs) (including 6-meter camera cable)

Tab. B.1

Construction - 7 elements, 7 groups	
Angular field - 73°	
Minimum focusing distance - 0.25m	
Diaphragm action - Fully automatic	
Minimum aperture - f/22	
Filter size - 55mm screw-in type	
Push-on diameter - 57mm	
Weight - 240g (auto) / 220g (electric)	
Barrel length - 52mm	

Tab. B.2

Appendice C

Alcune Considerazioni Operative per l'Analisi di Segnali monodimensionali

C.1 Introduzione

Uno dei problemi più rilevanti tutt'oggi oggetto di ricerca riguarda la determinazione di tutti quei dati sperimentali necessari per procedere alla progettazione di organi rotanti e non di sistemi meccanici, soprattutto nelle condizioni estreme di esercizio (alte velocità, elevate temperature, ecc.) tanto più se vengono impiegati nuovi materiali.

A tal fine per ottenere utili informazioni si procede a prove sperimentali condotte allo scopo di rilevare il manifestarsi di incipienti rotture o di deterioramento superficiale. In questi casi è prevista la registrazione delle vibrazioni posizionando opportunamente una serie di accelerometri. Fatta salva la frequenza minima di campionamento dei segnali accelerometrici, che deve essere almeno il doppio della sua frequenza massima (T. di Nyquist-Shannon) (ad es., $2 \times \text{frequenza di ingranamento}$), purtroppo ogni registrazione è affetta da rumore provocato da fenomeni casuali non correlati al problema da indagare. Per ridurre il rumore, sarebbe opportuno effettuare delle medie temporali "sincronizzate", eseguite cioè in modo che l'inizio di ogni serie temporale di campioni corrisponda ad una stessa posizione angolare del componente oggetto di indagine. Tale tecnica di analisi è possibile effettuarla se oltre agli accelerometri, viene impiegato anche un *pick-up* per la rilevazione del segnale tachimetrico. Un pick-up magnetico grazie al passaggio di opportuni marcatori posti, ad esempio, sull'albero dell'organo monitorato, permettendo di misurare la velocità di rotazione dello stesso, consente di determinarne la posizione angolare. All'interno di un intervallo individuato fra due marcatori successivi la velocità angolare può essere

considerata costante. Tale ipotesi è tanto più realistica quanto più fitte sono le divisioni previste per il singolo giro, ovvero, quanto più numerosi risultano i marcatori rilevati dal pick-up. Pertanto, poiché il segnale tachimetrico acquisito insieme a quello accelerometrico, consente di suddividere quest'ultimo in "finestre" relative ad un giro completo dell'organo monitorato, in ogni finestra sono presenti un numero costante di punti campionati.

In assenza di un dispositivo dedicato a sincronizzare l'inizio dell'acquisizione con una ben precisa posizione angolare si può considerare costante e nota la velocità angolare. Quindi fissata la frequenza di campionamento, possiamo calcolare la durata e la dimensione di ciascuna delle tracce da mediare, tutto questo nell'ipotesi che non vi siano significative fluttuazioni della velocità angolare.

È altresì noto che possiamo ottenere informazioni importanti sul comportamento meccanico, ad esempio, delle ruote dentate e segnali precursori della loro rottura attraverso l'osservazione dell'ampiezza dello spettro nell'intervallo che corrisponde alla frequenza di ingranamento della ruota monitorata. In tal caso è possibile verificare la eventuale presenza di bande laterali, che corrispondono a modulazioni prodotte da un difetto che si presenta ad intervalli di tempo regolari.

In alcuni casi può essere utile agire sul segnale campionato filtrando le ampiezze dello spettro corrispondenti a frequenze ben determinate (una volta nota la frequenza di rotazione ed il numero dei denti). In altri casi può essere utile selezionare regioni spettrali "piatte" per controllare l'insorgenza di rumore a largo spettro nelle bande prive di picchi.

Molto impiegato è il metodo che consiste nell'ottenere una successione di trasformate di Fourier relative a intervalli di tempo consecutivi, dopo avere applicato al segnale una finestra temporale di durata opportuna di convoluzione (box, triangolare, Hamming, Hanning).

Si possono utilizzare anche altri tipi di trasformate, anch'esse adatte all'analisi di segnali digitalizzati, quali la trasformata di Wigner-Ville o altre distribuzioni tempo-frequenza.

È possibile anche eseguire un'analisi in frequenza con tecniche stocastiche per la determinazione della densità spettrale di potenza.

Nell'ambito della presente ricerca informazioni importanti sono state ricavate dall'applicazione della Trasformata Wavelet integrata anche con tecniche afferenti alla Teoria del Caos. Osserviamo che, poiché all'asse dei tempi corrisponde (a velocità angolare costante) la posizione dei vari denti, una variazione dell'ampiezza della Trasformata Wavelet potrebbe dare indicazioni sul cedimento di un ben determinato dente.

Ricordiamo che lo spettro in frequenza di un ingranaggio (*Meshing Frequency*) sano risulta dominato dalla presenza della frequenza di ingranamento e delle sue armoniche (ad es., se una ruota dentata è provvista di 11 denti e la sua velocità massima di rotazione è di 41.67Hz (2500rpm) allora la frequenza di ingranamento è data da $11 \times 41.67 \approx 458$ Hz, la II armonica è data da 916Hz, la III armonica è data da 1374Hz e così di seguito).

In genere, si osserva un certo numero di bande laterali attorno a queste frequenze caratteristiche (frequenza ingranamento, armoniche, ecc.). Esse sono originate da fenomeni di modulazione in ampiezza e fase, originate da difetti introdotti in fase costruttiva e di montaggio. Poiché queste rappresentano delle componenti regolari dello spettro, non possono essere utilizzati per la diagnostica. Pertanto è indispensabile ricorrere a tecniche di filtraggio di tali frequenze in modo da eliminarle dallo studio.

L'operazione di filtraggio consiste nel porre uguali a zero le componenti dello spettro all'interno di un intervallo di frequenze selezionato. Successivamente al filtraggio, il segnale viene riportato nel dominio del tempo e analizzato con metodi statistici (in genere vengono selezionate regioni spettrali inizialmente piatte), meglio se tale filtraggio viene compiuto sulla media sincrona del segnale.

Infatti, la presenza di un difetto localizzato su un singolo dente di una ruota (es. fessura), introduce una variazione di breve durata nel segnale raccolto dagli accelerometri, mentre danneggiamenti maggiormente distribuiti (imperfezioni geometriche ed usura) danno luogo a modifiche del segnale che si estendono su un intero periodo di rivoluzione della ruota in esame.

Le metodologie di analisi applicabili al segnale raccolto dai sensori per evidenziarne lo sviluppo di un danno possono essere eseguite nel dominio del tempo, della frequenza o di entrambi.

In ogni caso esse vengono svolte sul segnale opportunamente "mediato" e non su quello "grezzo" uscente dagli accelerometri al fine di eliminare il rumore e le vibrazioni aperiodiche.

La tecnica che viene effettuata per eseguire tale operazione è detta media sincrona. Essa consiste nell'effettuazione della media aritmetica ovvero geometrica dei valori campionati del segnale rilevati ad ogni giro della ruota dentata a mezzo segnale tachimetrico.

In questo modo, all'aumentare del numero dei campioni, si può annullare il contributo delle fluttuazioni della velocità di rotazione attorno al valore in esame e ciò rende possibile ottenere sia l'andamento temporale del segnale accelerometrico mediato, sia gli eventuali spettri nel dominio della frequenza.

Per definizione la media sincrona di una funzione $x(t)$ è data da

$$\bar{y}(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(t + nT_R)$$

dove T_R è il periodo di sincronizzazione ed N il numero delle medie eseguite.

Tale metodologia consente di eliminare l'influenza del rumore e permette di evidenziare alcune componenti del segnale con una frequenza pari ad un valore prefissato o ad un suo multiplo consentendo l'individuazione di una loro eventuale modifica.

Operando un filtraggio sul segnale prodotto dalla media sincrona è possibile ottenere un segnale, detto "residuo", che ha la caratteristica di essere depurato della frequenza di ingranamento e delle sue armoniche. In questo modo risulta più semplice evidenziare le variazioni di segnale prodotte dallo sviluppo di un danno.

Il segnale residuo $r(t)$ è ottenuto come

$$r(t) = \bar{y}(t) - g(t)$$

dove $g(t)$ è la parte relativa alla frequenza che si vuole eliminare.

C.2 Descrizione dei principali indicatori

Generalmente si impiegano tre tipologie di segnali: *raw* (grezzi), *residual* (residuo) e *difference* o *differential* (differenza).

C.3 Nota Generale

Nel prosieguo si definiscono i seguenti segnali sincroni mediati temporalmente (TSA - Time Synchronous Average):

1. Residuo (r), ottenuto tramite filtraggio della frequenza di ingranamento (*gear mesh frequency*) e di tutti i suoi multipli (armoniche di ordine superiore), nonché della frequenza di rotazione dell'albero (*driveshaft frequency*) e dei suoi multipli (seconde armoniche);
2. Differenza (d), ottenuto tramite filtraggio delle frequenze di ingranamento, di tutti i suoi multipli e di alcune bande laterali (*sidebands*).

Comunque, alcuni autori, lasciano le seconde armoniche relative alla *driveshaft frequency* nel segnale residuo ovvero rimuovono dal segnale differenza soltanto la sideband del secondo ordine.

Infatti, è stato dimostrato come, l'effetto di modulazione introdotto da difetti localizzati, si manifesti con bande laterali di ampiezza limitata ma in una banda larga, mentre la modulazione introdotta dai difetti distribuiti, si manifesta con poche coppie significative di bande laterali di ampiezza maggiore.

In genere le due componenti che costituiscono il segnale *raw*, uniforme e *residua*, forniscono informazioni su anomalie/danni non localizzati, o sulla generica "rumorosità" del segnale (*scuffing*), mentre la componente *residua* dà informazioni su anomalie/danni localizzati (*bending*, *spalling*).

C.4 Curtosi

La curtosi (kurtosis), nel linguaggio della statistica, è un allontanamento dalla normalità distributiva, rispetto alla quale si verifica un maggiore "appiattimento" (distribuzione platicurtica) o un maggiore "allungamento" (distribuzione leptocurtica). La più nota misura della curtosi è l'indice di Fisher, ottenuto facendo il rapporto tra il momento centrato di ordine 4 (m_4) e la varianza al quadrato (m_2^2)

$$\gamma_2 = \beta_2 - 3$$

dove

$$\beta_2 = \frac{m_4}{m_2^2}$$

è l'indice di curtosi, in cui m_4 e m_2 sono rispettivamente il momento centrale di ordine 4 e 2.

Una definizione matematica è la seguente

$$Kurt = \frac{N \sum_{i=1}^N (s_i - \bar{s})^4}{(\sum_{i=1}^N (s_i - \bar{s})^2)^2}$$

dove

N è il numero di punti del segnale s

s_i è l' i -mo punto del segnale.

Possiamo dire che la curtosi è il quarto momento centrale del segnale, normalizzato rispetto al quadrato della varianza.

Nel caso di una variabile casuale normale, $\beta_2 = 3$, così che il coefficiente di curtosi γ_2 risulta pari a zero.

Allora, in sintesi, se il coefficiente di curtosi è (Fig. C.1)

- >3 la curva si definisce leptocurtica, cioè più "appuntita" di una normale;
- <3 la curva si definisce platycurtica, cioè più "piatta" di una normale;
- $=3$ la curva si definisce normocurtica (o mesocurtica), cioè "piatta" come una normale.

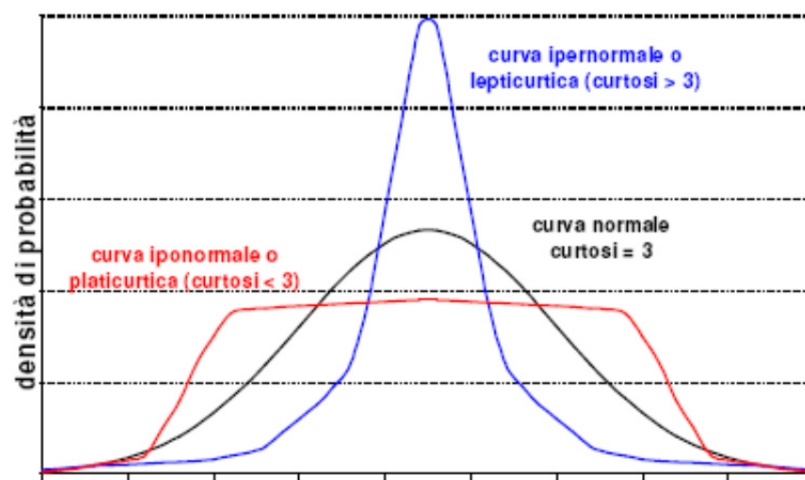


Fig. C.1

Il calcolo del coefficiente di curtosi ha senso solo nelle distribuzioni unimodali.

Siccome β_2 e γ_2 vengono calcolate facendo lo scarto dalla media alla quarta potenza, valori equidistanti dalla media (simmetrici rispetto alla media) contribuiscono con lo stesso *peso* mentre valori distanti dalla media sono molto più "pesanti" di quelli prossimi alla media, cosicché distribuzioni "larghe" producono β_2 e γ_2 elevati.

Il coefficiente di curtosi, non rappresenta una buona stima del corrispondente parametro della popolazione se calcolato su piccoli campioni. Ciò nonostante, anche in presenza di piccoli campioni, valori elevati di tali indicatori devono far insorgere nel ricercatore il dubbio che le eventuali ipotesi di normalità non siano verificate.

Il valore dell'indice corrispondente alla distribuzione normale (gaussiana) è 0 (qualora si utilizzi l'indice mostrato che, come si vede, è centrato sullo zero poiché viene sottratto 3). È possibile che alcuni indici non siano centrati sullo zero e quindi il valore ottenuto nel caso di normalità è 3 (così come mostrato nella figura precedente).

Come già detto, l'indice di curtosi è uno degli indici relativi alla forma di una distribuzione, che costituisce una misura dello "spessore" delle code di una funzione di densità, ovvero il grado di "appiattimento" di una distribuzione. L'interesse per questo indice è dato dal fatto che lo "spessore" delle code influenza il comportamento di diverse statistiche.

Benché sia stato evidenziato che non c'è una relazione tra il grado di appiattimento e l'indice di curtosi (si veda oltre), (Irving Kaplansky, nel 1945 in "A common error concerning Kurtosis") è rimasto in uso tale terminologia.

Pertanto la curtosi è un indicatore statistico che permette di definire il carattere impulsivo di un segnale operando in corrispondenza di un determinato campo di frequenza.

È un parametro adimensionale che confronta la distribuzione dei dati in esame con una di tipo Gaussiana in modo da quantificare l'appiattimento della densità di probabilità del segnale attraverso la misura dei picchi della distribuzione. In assenza di segnali impulsivi, cioè con una distribuzione Gaussiana, l'indice ha un valore di 3 (se non è zero centrato) mentre può raggiungere un valore molto più elevato in presenza di tali eventi.

C.5IV momento della funzione densità

Il IV momento della funzione densità è dato dalla relazione:

$$\mu_4 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^4 p_i$$

dove:

$x_i = 1, 2, \dots, N$ sono variabili discrete casuali

N è l'ampiezza campionaria

μ è la media campionaria

σ è lo scarto quadratico medio campionario

p_i è la probabilità i -ma relativa cioè ai primi i valori della distribuzione della variabile casuale x_i .

Appendice D

Principali irregolarità di funzionamento di un motore a c.i. per compressione

D.1 Premessa

Si ritiene preliminarmente utile riportare nella presente Appendice alcune osservazioni/considerazioni inerenti le più comuni irregolarità di funzionamento di un motore a c.i. per compressione, che interessano prevalentemente la fase di combustione, riferita ovviamente al singolo cilindro.

È essenziale, per meglio comprendere i diagrammi relativi alla seconda parte della tesi, accennare alle fasi in cui è schematizzabile lo sviluppo della combustione in un motore diesel, durante la quale si può caratterizzare la “firma vibrazionale” rilasciata da ciascun cilindro.

D.2 Analisi del processo di combustione in un motore ad accensione per compressione

In un motore Diesel, la camera di combustione ospita inizialmente aria compressa (con rapporto di compressione volumetrico 12:20) diluita da una piccola frazione di gas combusti e combustibile che viene iniettato in fase liquida in prossimità del punto morto superiore (TDC).

A differenza dei motori ad accensione comandata ove è presente la candela, nei motori diesel non è direttamente controllabile il punto ed il momento in cui avviene l'accensione, definita come la comparsa della fiamma o di una sensibile variazione della pressione all'interno del cilindro. Infatti l'accensione di un elemento della carica non richiede il trasferimento di energia da un elemento adiacente, ma avviene quando le condizioni puntuali di pressione, temperatura e miscelamento aria/combustibile la rendono possibile.

Il controllo della fasatura dell'istante di accensione, rispetto al punto morto superiore, avviene controllando l'istante di inizio iniezione.

Si deve poi tenere in considerazione che tra l'inizio dell'iniezione del combustibile e l'accensione intercorre un intervallo temporale, detto ritardo, che costituisce la prima fase del processo di combustione nel diesel che può essere schematizzato come di seguito in Fig. D.1 (le seguenti figure mostrano nel dettaglio le fasi in cui può dividersi il processo di combustione di un gasolio):

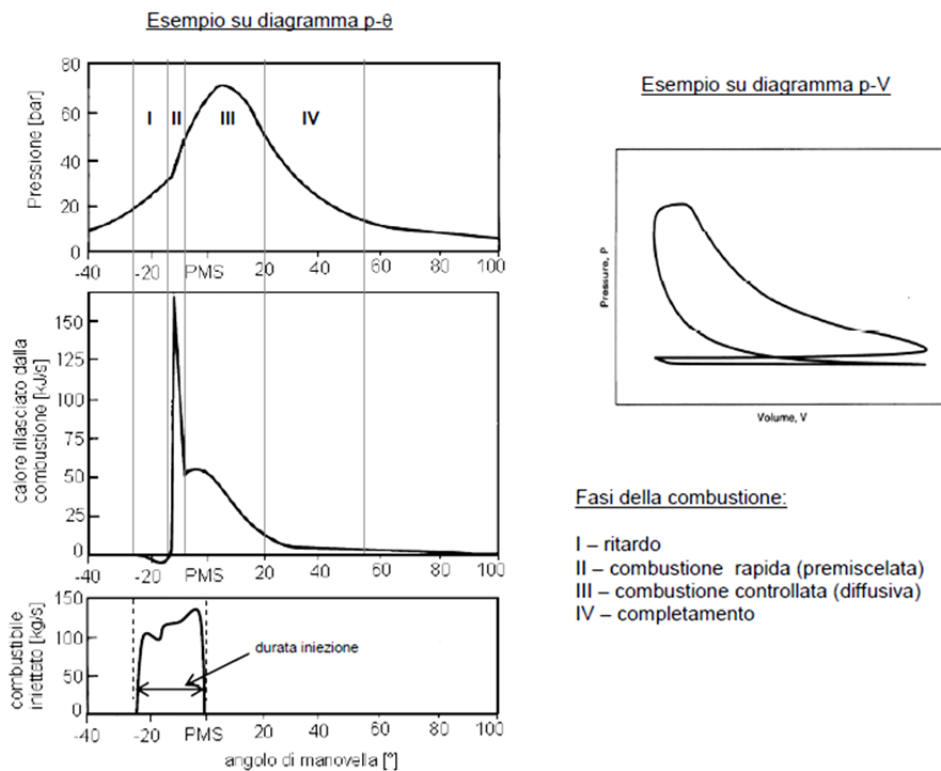


Fig. D.1

- **I fase.** Durante tale fase, detta ritardo, avviene il preriscaldamento del combustibile fino alla saturazione, la sua parziale evaporazione e miscelamento con aria (ritardo di tipo fisico), inoltre deve trascorrere un tempo pari al ritardo di autoaccensione di quella particolare miscela (ritardo chimico) prima che la combustione vera e propria si avvii. Il ritardo è in genere sufficientemente lungo da far sì che al momento dell'accensione all'interno del cilindro sia presente una apprezzabile quantità di combustibile evaporato e miscelato. La combustione infatti appare quindi non appena una quota parte del combustibile che sta entrando

in camera si è preparato all'accensione (chiaramente ciò avviene prima che tutto il combustibile sia stato iniettato e sia evaporato).

- **II fase.** In tale fase, detta di combustione rapida (premiscelata), si verifica la combustione di quel combustibile che durante il periodo di ritardo è evaporato e si è mescolato all'aria. Velocità ed intensità di combustione sono legate al valore del ritardo e del rapporto tra ritardo e tempo di iniezione. Infatti il gradiente ed il valore massimo della pressione aumentano all'aumentare del ritardo, essendo maggiore il tempo a disposizione del combustibile per evaporare e miscelarsi. L'influenza del ritardo è pesante quando questo è minore del tempo di iniezione; quando invece è maggiore, la quantità di combustibile che brucia nella II fase non è influenzata dal valore del ritardo. I gradienti di pressione risultanti possono essere tali da sollecitare in modo eccessivo il motore e quindi vanno limitati riducendo il tempo di ritardo. Tale combustione violenta e molto rapida è assimilabile ad un processo a volume costante.

- **III fase.** Tale fase, detta di combustione lenta (diffusiva), si estende circa dall'istante a pressione massima (o dal termine della fase premiscelata, in quanto non sempre i due eventi coincidono) fino a quando vi è sostanziale rilascio di calore. In tale fase si ha la combustione del nucleo centrale del getto e del combustibile successivamente iniettato. In questa fase la quantità di calore rilasciato può essere modulata attraverso il controllo dell'iniezione. Se l'angolo di ritardo è maggiore di quello di iniezione, la III fase della combustione coinvolge solo quel combustibile che nella fase precedente non ha reperito l'ossigeno necessario per bruciare; in tal caso la velocità di reazione è limitata solo dal miscelamento (diffusione). In genere però il tempo di ritardo è inferiore alla durata dell'iniezione, sicché avviatasi la combustione diffusiva, tutto il gasolio iniettato dal quel momento in poi tenderà a bruciare in modo diffusivo; in tal caso la velocità di combustione dipende sia dalla diffusione che dalla legge di portata iniettata.

- **IV fase.** Tale fase è relativa al completamento del processo di combustione. Essa ha luogo in prossimità delle pareti della camera, dove le basse temperature tendono a spegnere la fiamma, ed in genere ovunque stia per esaurirsi la concentrazione di combustibile. In questa fase il rilascio di calore per unità di tempo è molto basso e va riducendosi gradatamente sino ad annullarsi.

Si è già evidenziata la necessità di ridurre l'angolo di ritardo. Per far questo è necessario analizzare i parametri da cui dipende il ritardo.

Le principali cause del ritardo sono:

- **Finezza di polverizzazione.** L'aumento di temperatura nell'unità di tempo è inversamente proporzionale al diametro della goccia, essendo proporzionale al rapporto tra calore ricevuto ($\alpha \cdot D^2$) e massa ($\alpha \cdot D^3$). All'aumentare della finezza di polverizzazione aumenta il ΔT nell'unità di tempo e dunque diminuisce il tempo necessario per il preriscaldamento fino alla temperatura di saturazione.

- **Turbolenza e temperatura dell'aria.** Per avere un valore di ritardo più basso possibile, è necessario avere una temperatura iniziale più alta (corrispondente ad un elevato rapporto di compressione) ed una turbolenza che favorisce la trasmissione del calore ed il miscelamento aria-combustibile.

- **Natura del combustibile.** Il ritardo è più breve in presenza di combustibili caratterizzati da una più bassa temperatura di accensione. La tendenza di un combustibile ad auto-accendersi è misurata dal suo numero di cetano.

- **Pressione dell'aria aspirata.** Al crescere della pressione diminuisce la temperatura di accensione.

D.3 Irregolarità rilevabili dall'Indicator Diagram

Alcune irregolarità rilevabili nella forma del diagramma possono indicare problemi nel funzionamento del motore.

Notiamo che se lo stesso tipo di anomalia è rilevabile sui diagrammi ottenuti dal funzionamento di ciascun cilindro, allora possiamo ritenere che la causa possa essere più generale e quindi non associabile ad un malfunzionamento del cilindro. In questi casi è probabile che l'irregolarità di funzionamento possa dipendere dalla qualità del carburante o della sua alimentazione (pompa), sistema di

turbocompressione, raffreddamento del motore, o non corretta regolazione dell'albero a camme, ecc.

Di seguito si riportano alcuni esempi (diagrammi) delle più comuni irregolarità di funzionamento associabili ad un cilindro.

D.3.1 Anticipo di accensione

Indicazioni ed effetti:

- Si presenta con anomalo picco di pressione di un cilindro, che si verifica all'incirca allorquando il pistone è nella sua posizione PMS. (Fig. D.2).

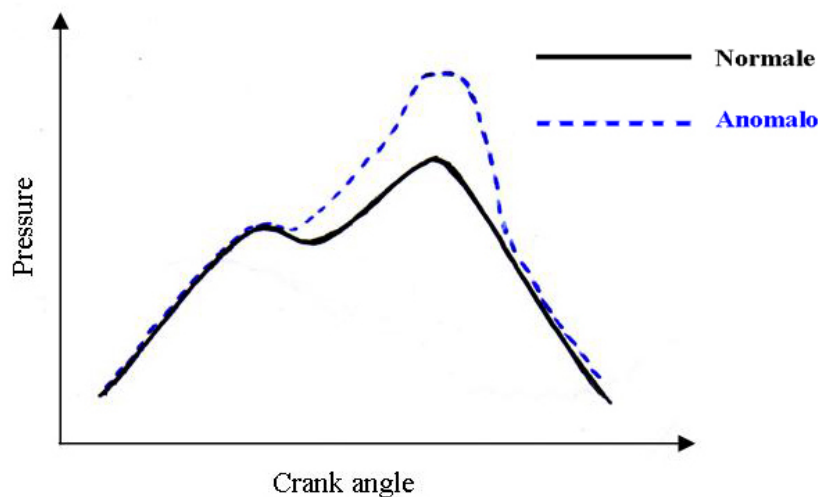


Fig. D.2

- Un improvviso e profondo *shock* che si trasmette ai riduttori ed ai cuscinetti con in corrispondenza un rumore simile ad un battito (*knocking*).
- Sebbene l'efficienza termica sia molto alta e la temperatura allo scarico si riduca, lo *shock* e la conseguente vibrazione riducono di fatto l'energia sfruttabile.

Cause:

- Non corretta fasatura (*timing*) della pompa di alimentazione del carburante.
- Non corretto numero di cetano del carburante (o qualità)
- Surriscaldamento delle superfici del cilindro.

D.3.2 Ritardo di accensione

Indicazioni ed effetti:

- Bassa pressione del cilindro che si manifesta dopo il PMS del pistone. (Fig. D.3).

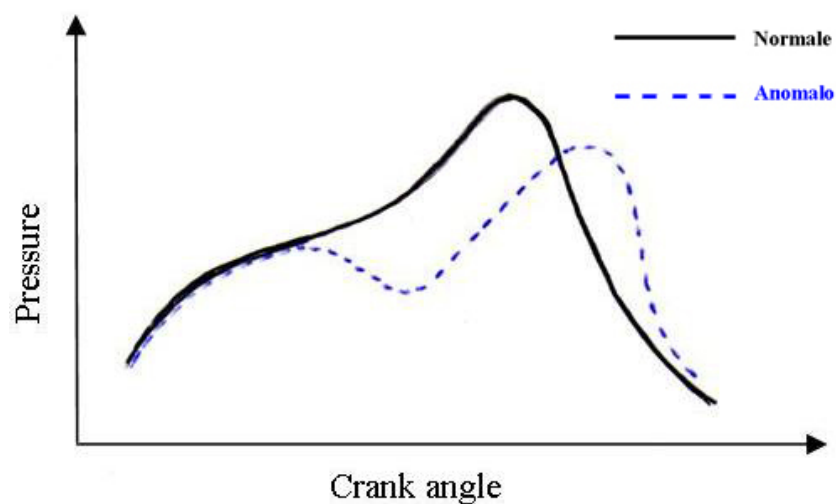


Fig. D.3

- La combustione può continuare durante la fase di espansione e può essere incompleta al punto da determinare una perdita di energia prodotta, alta temperatura e fumosità.
- Perdite di potenza in quanto il combustibile non brucia correttamente e non trasmette potenza nel punto più opportuno della fase di espansione.

Cause:

- Alta viscosità o scarsa qualità del combustibile.
- Perdita di pompaggio del carburante o non corretta fasatura.
- Sotto raffreddamento di parti all'interno del cilindro.
- Scarsa atomizzazione del carburante.
- Bassa compressione.
- Insufficiente alimentazione dell'aria per la combustione.

D.3.3 Afterburning

Indicazioni ed effetti:

- Si presenta come una ripresa di esplosione durante la fase finale della espansione. (Fig. D.4).

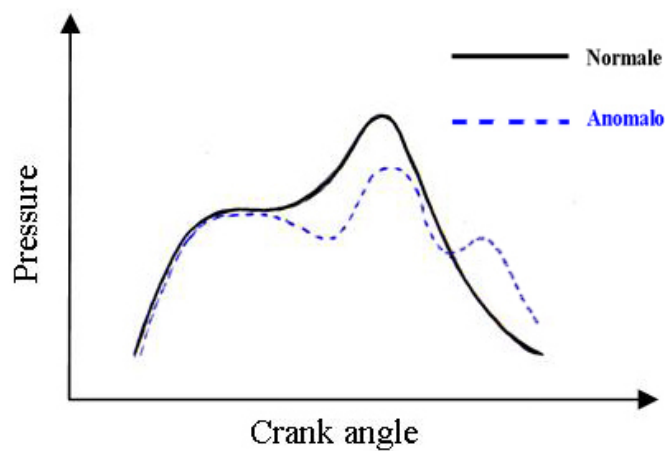


Fig. D.4

- Alta temperatura allo scarico e alta pressione, presenza di combustibile in fase di accensione ed il carbone che passa nello scarico.
- Rischio di innescare fiamme sulle valvole di scarico e sporcare il sistema di scarico, con il rischio di intasare il turbocompressore o innescare fiamme.

- L'alta temperatura all'interno del cilindro causa un deterioramento nella lubrificazione ed un possibile danno dovuto alla rigatura delle superfici.
- Bruciatura della corona/bordo del pistone.

Cause:

- Lenta o ritardata combustione del carburante.
- Scarsa qualità del carburante.
- Alta viscosità e bassa temperatura del carburante.

D.3.4 Perdita all'iniettore di carburante (*LEAKY*)

Indicazioni ed effetti:

- Perdita di potenza nel cilindro interessato, con produzione di fumo allo scarico ad alta temperatura.
- Esistenza di *knocking* o onde di pressione nel sistema di iniezione.
- Fluttuazioni di pressione nel diagramma indicato durante il processo di espansione. (Fig. D.5).

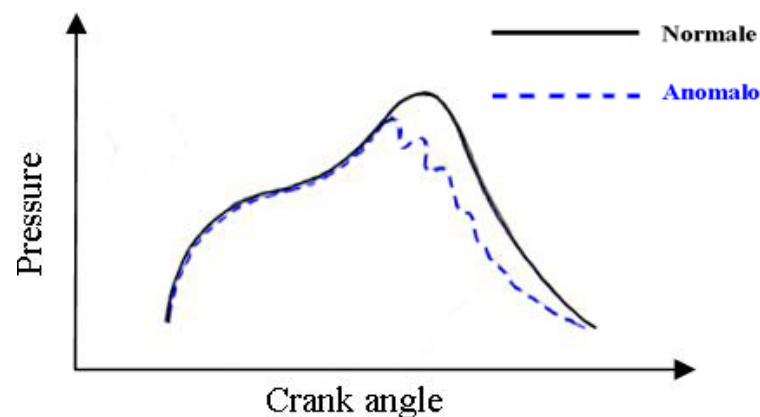


Fig. D.5

- Una più alta evoluzione della linea di espansione allo scarico è indice della presenza di *afterburning*.

Cause:

- Perdita di carburante dalla valvola.
- Gas caldi in uscita dal cilindro possono ritornare sulla punta dell'iniettore formando carbone e soffocando il processo di atomizzazione.
- Il carbone si può anche formare ai margini della zona di atomizzazione dovuto alla bruciatura delle goccioline di carburante.

D.3.5 Parziale soffocamento della valvola di alimentazione del carburante

Indicazioni ed effetti:

- Ridotta temperatura allo scarico nel cilindro. (Fig. D.6).

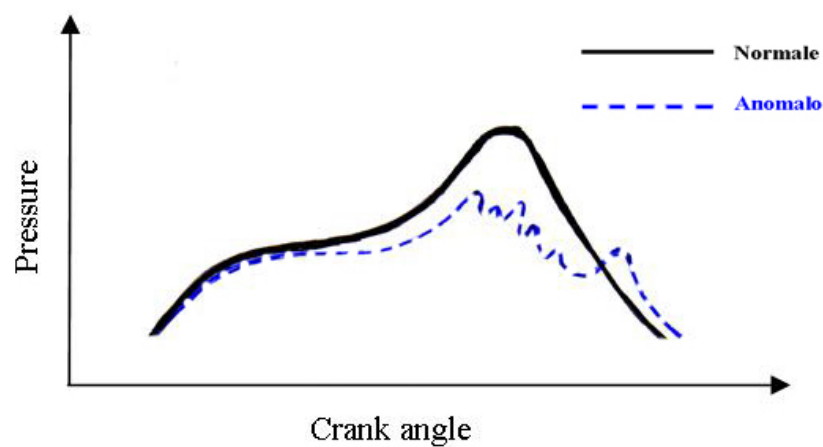


Fig. D.6

- Segnalazione sulla scheda di potenza e sulla *DRAW CARD*.
- Perdita di potenza nel motore.

Cause:

- Contaminazione del carburante con detriti.

- Gas caldi ritornano verso gli iniettori causando una produzione di calore.
- Il surriscaldamento degli iniettori causa la produzione di carbone.

D.3.5 Bassa compressione

Indicazioni ed effetti:

- Indicazioni di bassa potenza nel diagramma. (Fig. D.7).

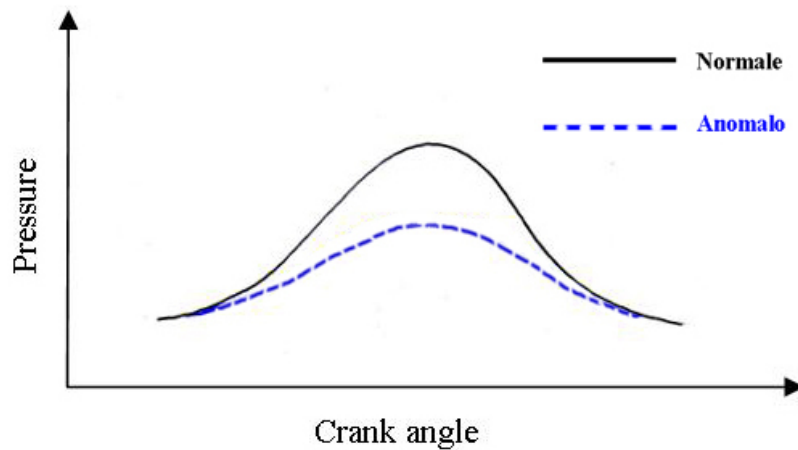


Fig. D.7

- Perdita di potenza del motore.

Cause:

- Mancanza di combustione
- Mancanza di alimentazione di aria
- Fuoriuscita di aria dal pistone durante la fase di compressione dovuta all'usura o rottura della fascia del pistone o bruciatura dei bordi.

Appendice E

Descrizione sala prove turbocompressori Di.M.E.

E.1 Sala di controllo

La sala prove turbocompressori del Di.M.E. è divisa in due parti:

- Sala motore
- Sala controllo

La sala motore è equipaggiata con:

- Motore, marca VM, alimentazione diesel
- Freno dinamometrico marca Apicom FR 400 BRP

La sala di controllo è separata dalla sala motore da un vetro infrangibile (Fig. E.1) che consente di vedere tutto ciò che avviene all'interno nonché da una porta di sicurezza a tenuta stagna per garantire la massima sicurezza del personale.



Fig. E.1

L'operatore ha a disposizione, tra l'altro, un sistema di controllo del motore che consta di:

- Hardware di controllo National Instruments FieldPoint.
- Personal computer per l'esecuzione di un sistema operativo real-time che esegue le applicazioni LabVIEW Real-Time.
- Consolle per il controllo manuale di alcuni parametri motoristici (Fig. E.2), quali accensione motore, regolazione coppia e velocità, arresto di emergenza, ecc.



Fig. E.2

Mediante l'ambiente di sviluppo LabVIEW è stata elaborata un'interfaccia grafica che permette di monitorare e variare le condizioni di funzionamento del motore.

Il motore, pur essendo privo della scatola del cambio (gear-box), è dotato di un regolatore di numero di giri che permette all'operatore di variare a piacimento la velocità.

All'interno della sala di controllo è installato un sistema di regolazione del freno dinamometrico che verrà illustrato nelle sue caratteristiche successivamente.

Il segnale della coppia è rilevato mediante cella di carico. Si tratta di uno strumento che rileva la deformazione meccanica di un oggetto in maniera

indiretta, leggendola in mV o in V e trasformandola nella corretta unità di misura; la coppia è variabile a piacimento dall'operatore.

L'acquisizione del numero di giri (rpm) può avvenire in due modi: mediante un encoder su freno o mediante un sensore di prossimità posto sul volano motore ad un dente mancante; nel nostro caso è stato adoperato il secondo metodo.

Le temperature dell'olio e dell'acqua sono controllate mediante termocoppia di tipo K (Chromel (Ni-Cr) (+)/Alumen (Ni-Al) (-)).

La sala motore è dotata di un sistema di aspirazione, marca Torrino, che garantisce l'ottimale ricircolo dell'aria.

L'alimentazione del motore, mediante combustibile a gasolio, è resa possibile da un sistema di tubi che fa capo ad un serbatoio posto, per ragioni di sicurezza, all'esterno della sala stessa.

Il motore Chrysler VM motori 2.5l è collegato assialmente al freno dinamometrico a correnti parassite Apicom FR 400-BRP.

E.2 Motore

Il motore installato in sala prova è un diesel della CHRYSLER VM Motori (Fig. E.3).

Dati tecnici:

- Cilindrata 2499cc
- Alimentazione a gasolio
- Quattro cilindri in linea
- Common Rail
- Rapporto di compressione 17.5:1
- Ordine di accensione 1-3-4-2

I dati tecnici mostrano che esso ha una importante coppia ai bassi regimi: 340Nm a soli 2000giri/minuto, ed una potenza massima di 105kW a 4000giri/min.

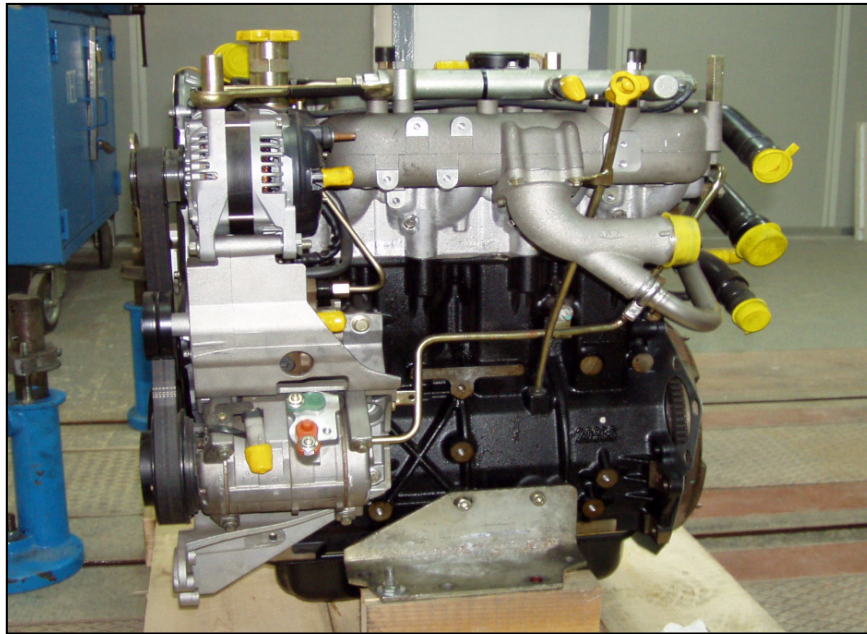
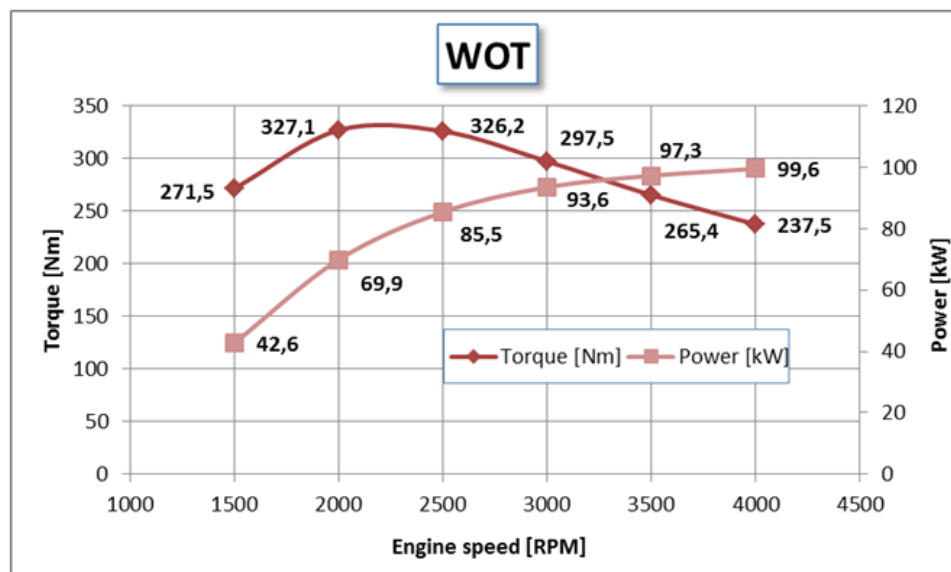


Fig. E.3 - Motore CHRYSLER VM

In Fig. E.4 è riportata la curva di funzionamento del motore.



Curva di funzionamento del motore

Fig. E.4

In Fig. E.5 è riportato lo schema inerente il posizionamento del sensore relativo al segnale tachimetrico.

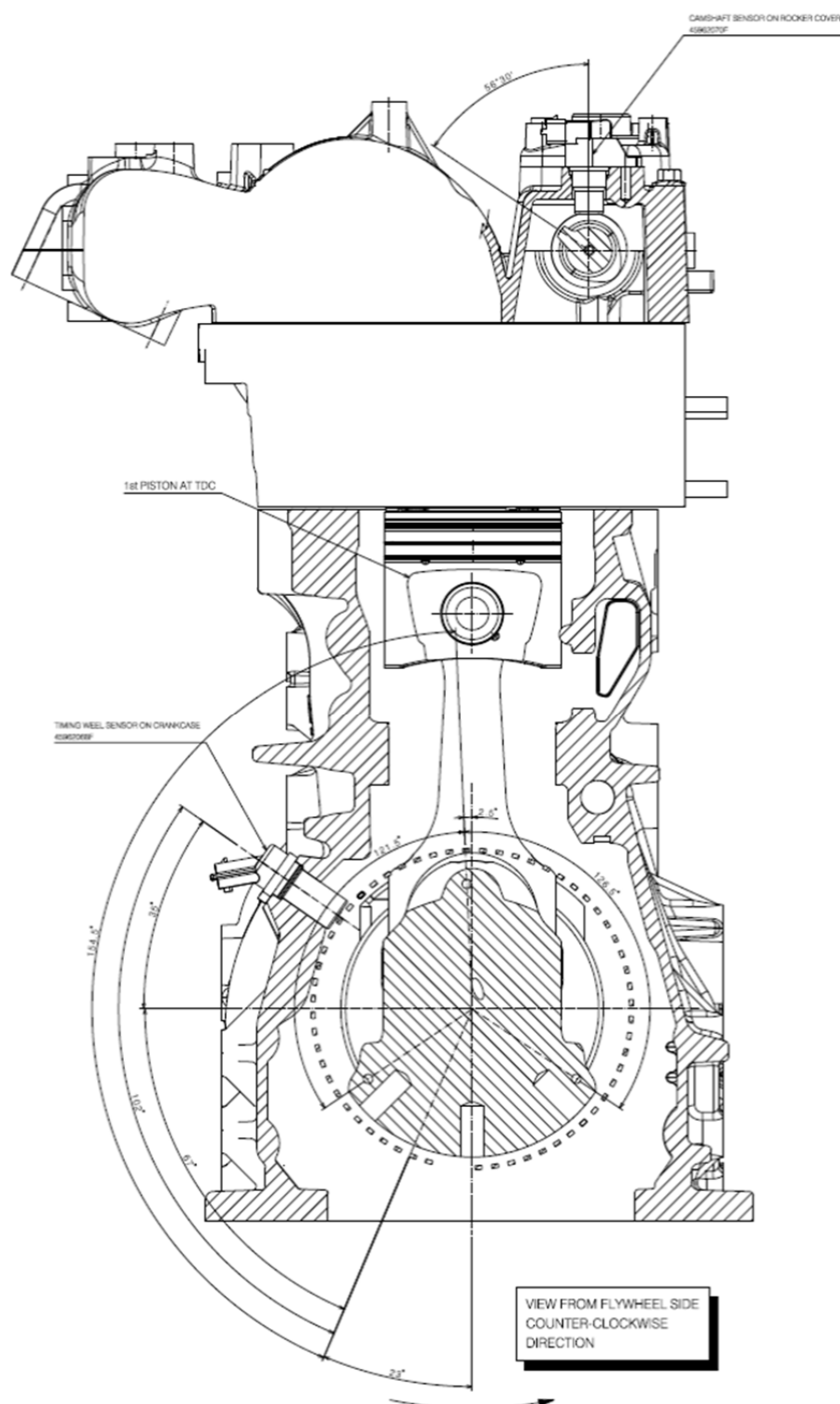


Fig. E.5

In Fig. E.6 è riportato il diagramma polare delle fasi del motore.

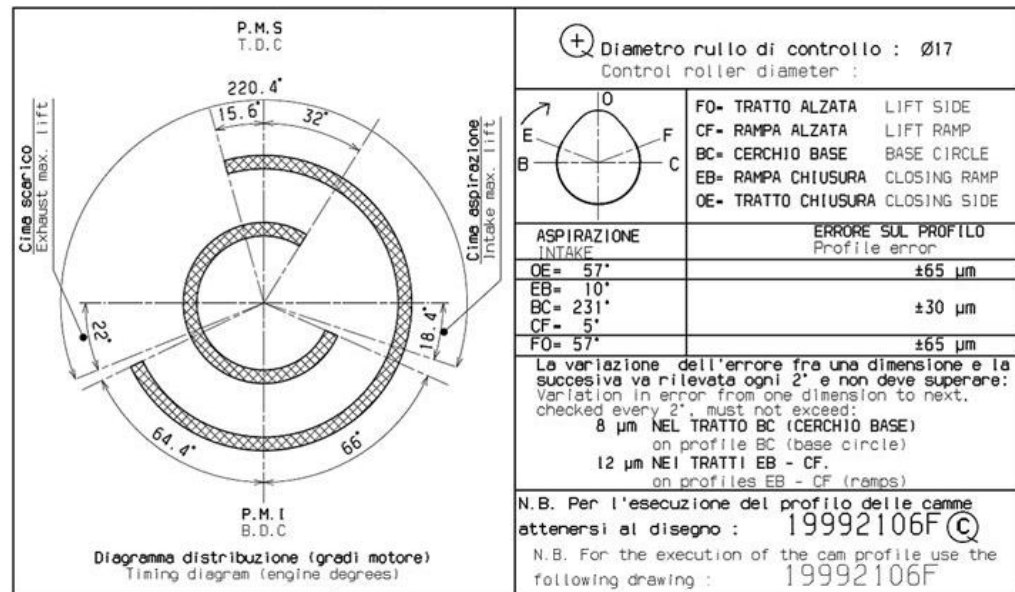


Diagramma polare delle fasi del motore

Fig. E.6

E.3 Freno dinamometrico

Nella Fig. E.7 è riportato il freno dinamometrico a correnti parassite a cui assialmente è collegato il motore.



Fig. E.7 – Freno a correnti parassite Apicom - FR 400 BRP 260kW (circa 60CV)

Il funzionamento è dovuto all'insorgere, durante il moto, di correnti parassite nei circuiti elettrici dello statore, che sono normalmente magnetizzati mediante l'applicazione di una corrente continua, correnti che sono tanto più intense quanto più veloce è il moto del rotore, costituito da un disco di acciaio speciale ad alta permeabilità magnetica.

Le correnti parassite dissipano, pertanto, in calore per effetto Joule la potenza fornita dal motore, e tale calore viene asportato mediante un circuito di acqua refrigerante.

La regolazione della coppia frenante si effettua modificando il valore della corrente continua che viene applicata ai circuiti contenuti nello statore del freno.

Tali tipi di freno sono particolarmente indicati per la loro grande sensibilità e precisione anche a carichi bassissimi.

Nella Fig. E.8 è illustrato lo schema costruttivo di un freno a correnti parassite.

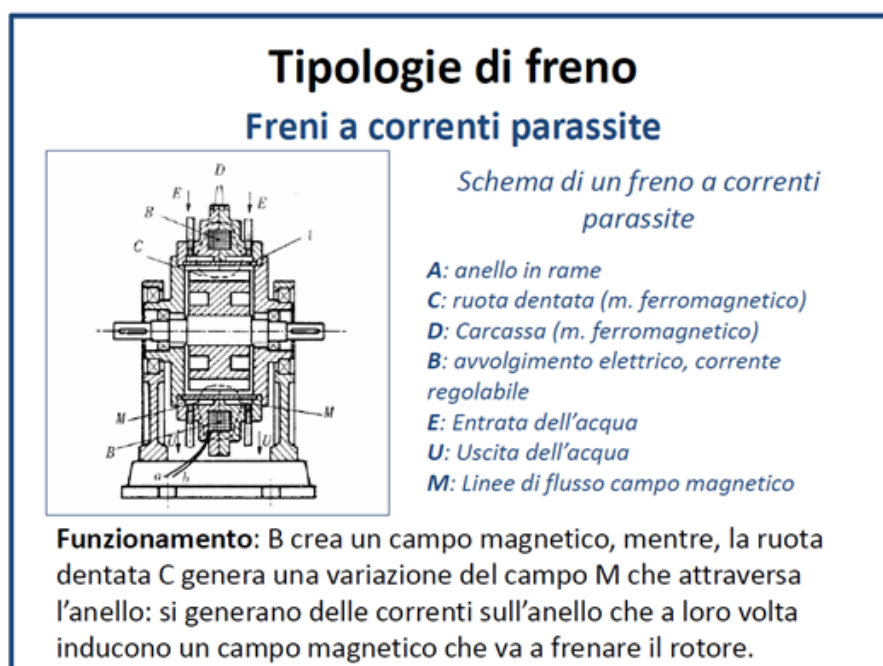


Fig. E.8

Nella Fig. E.9 è rappresentato il campo di funzionamento del freno Apicom FR 400-BRP.

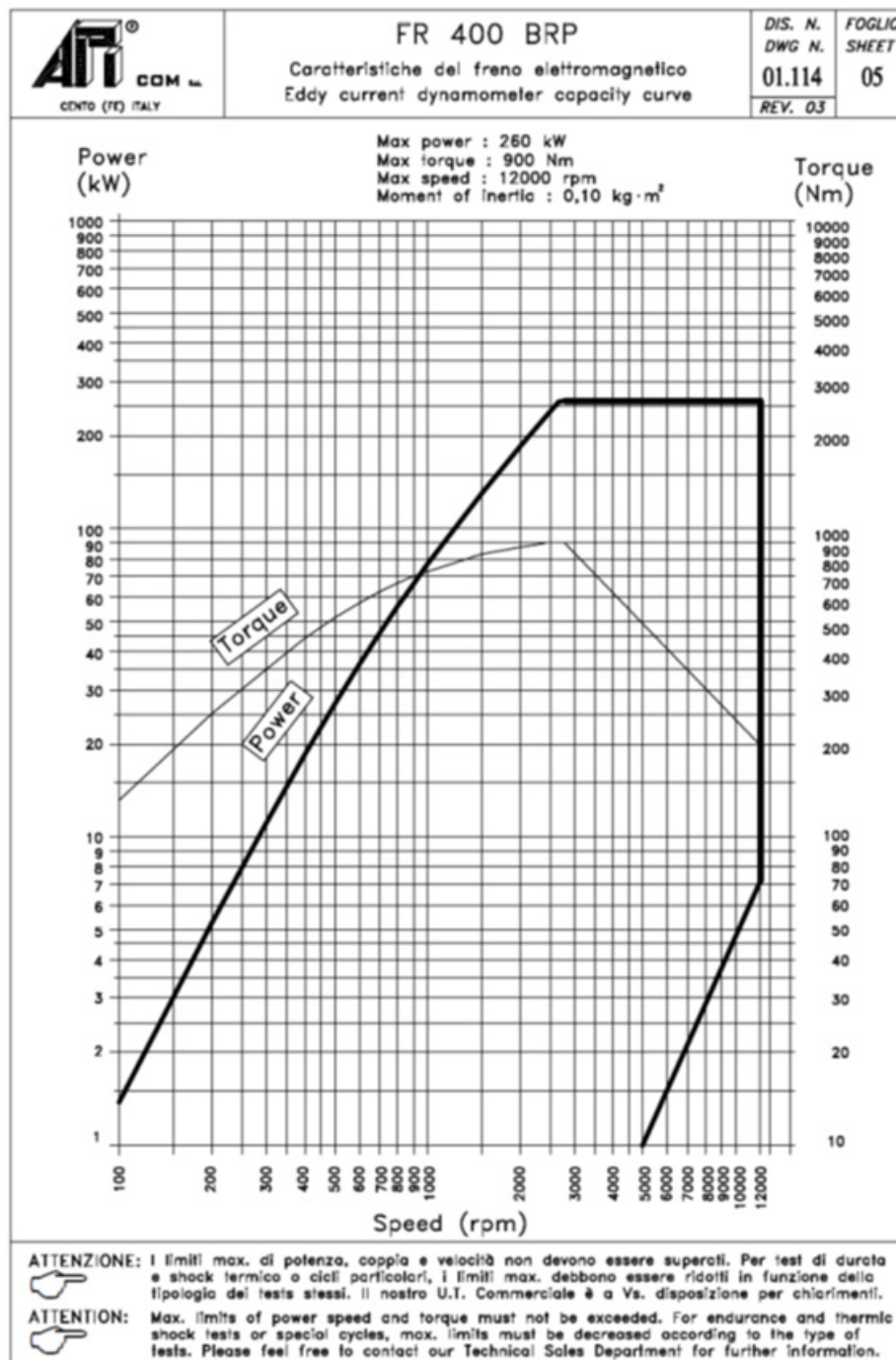


Fig. E.9

Appendice F

Motore monocilindrico ad accensione comandata

F.1 Descrizione del motore monocilindrico

Il motore utilizzato per l'attività sperimentale è un monocilindro (Fig. F.1), otticamente accessibile, ad accensione comandata, del tipo PFI a quattro tempi, equipaggiato con la testa di un motore di serie Fiat 16 valvole da 1600 cm³ la cui alimentazione è di tipo multipoint.

Il motore ottico presenta le stesse caratteristiche geometriche del motore commerciale da cui è stata ricavata la testa: una cilindrata pari a 399 cm³, corsa di 81.3 mm, alesaggio 79.0 mm e rapporto di compressione 10:1. L'iniezione di combustibile viene effettuata nel condotto di aspirazione attraverso un elettroiniettore Bosch a 10 fori collegato ad una pompa operante ad una pressione di circa 3.5 bar.

La pressione in camera è stata acquisita attraverso un trasduttore di pressione di tipo piezo-quarzo. Il pistone del motore ha una forma allungata, è piatto e il suo cielo è in quarzo trasparente agli UV ($\varnothing = 57\text{mm}$). La temperatura del motore viene stabilizzata da un'unità di condizionamento: esso viene mantenuto in trascinamento da un motore elettrico fino a quando la temperatura dell'acqua di raffreddamento raggiunge 65° C. Un compressore esterno permette di simulare condizioni di sovralimentazione con pressioni dell'aria in ingresso fino a 2 bar.

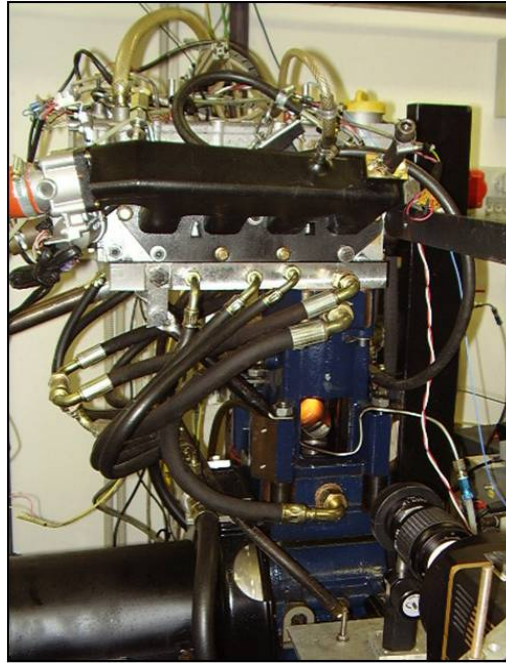


Fig. F.1

F.2 Test conditions

Nelle Tab. F.1 e Tab. F.2 sono riportati alcuni dettagli tecnici:

Displacement	399 cm ³
Bore	79 mm
Stroke	81.3 mm
Connecting Road	143 mm
Compression Ratio	10:1
Valves per Cylinder	4

Tab. F.1

Engine speed	2000 rpm
Abs intake air press.	1.4 bar
Abs. intake air temp.	338 K
Relative injection press.	3.5 bar
Throttle position	Wide open
Exhaust Valve Open	153 CAD ATDC
Exhaust Valve Close	360 CAD ATDC
Inlet Valve Open	357 CAD ATDC
Inlet Valve Close	144 CAD BTDC

Tab. F.2

Ringraziamenti

Lo svolgimento dell'attività scientifica ha avuto luogo presso il Dipartimento di Meccanica ed Energetica (oggi Dipartimento di Ingegneria Industriale, sez. Meccanica ed Energetica), della Facoltà di Ingegneria dell'Università degli Studi di Napoli, Federico II, sotto il tutoraggio del Prof. Vincenzo Niola a cui vanno i più sinceri ringraziamenti per la stima che ha riposto in me, per i suoi preziosi consigli e per la sua disponibilità, sia sotto il profilo professionale che quello umano e sotto il coordinamento del Prof. Fabio Bozza, sempre pronto a fugare ogni mio dubbio, al quale va un sentito ringraziamento.

In questi anni di Dottorato, un ruolo di fondamentale importanza ha avuto il Prof. Giuseppe Quarenba che con stima, professionalità e pazienza mi ha insegnato il vero valore della ricerca e della didattica. A lui un grazie immenso per tutto il lavoro che ha fatto per me.

Ancora un sincero ringraziamento va a tutti i Professori ed Ingegneri che hanno in qualsiasi modo avuto parte nelle mie attività di ricerca.

Un ringraziamento particolare va a Clorinda, che mi ha supportato sempre, anche nei momenti più difficili, rendendo la mia vita ogni giorno più serena. Un grazie di vero cuore perché ha sempre creduto in me e nelle mie scelte.

Grazie alle mie nonne, perché nella mia vita hanno sempre avuto fiducia nelle mie decisioni, incoraggiandomi qualora ce ne fosse bisogno e riuscendo sempre a farmi sorridere.

Voglio ringraziare anche mia sorella Paola, in quanto anche se spesso litighiamo, mi è stata sempre vicino in questi anni.

Un ringraziamento a tutti i miei amici, sempre disponibili nei miei confronti e pronti ad ogni ora per una “chiacchiera” o anche per un semplice caffè.

Grazie a mamma e papà... e per voi non ho parole... Il vostro supporto ed i vostri consigli mi hanno guidato sin qui. Un papà ed una mamma “monumentali”!!!

Infine un grazie al Signore per tutto quello che mi regala ogni giorno e per aver scelto nel Suo disegno della mia vita questa splendida esperienza.

Bibliografia

1. Niola V., Avagliano V., Quaremba G., Troncone S., *Metodo per la determinazione della pressione media indicata ed istantanea vibrazionale nei motori a combustione interna attraverso Trasformata Wavelet*, Brevetto n° NA2013A000018.
2. Niola V., Avagliano V., Quaremba G., Amoresano A., *Metodo per la determinazione dello stato tenso-deformativo di manufatti saldati, attraverso Trasformata Wavelet*, Brevetto n° NA2012A000007.
3. Niola V., Quaremba G., con Applicazioni a cura Avagliano V., *Elementi di dinamica dei sistemi meccanici per l'ingegneria. Dalla Trasformata Wavelet alla Teoria del Caos*, Liguori Ed., 2011.
4. Cyril M. Harris, *Shock and Vibration Handbook*, 4^a ed., McGraw-Hill.
5. Robert B. Randall, *State of the art in monitoring rotating machinery – Part I*, Sound & Vibration, March 2004.
6. John G. Winterton, *Component identification of gear generated spectra*, Machinery Diagnostic Services, Bently Nevada Orbit Journal, (June, 1991) pgs.11-14.
7. A. V. Barkov, N. A. Barkova, *Diagnostic of Gearing and Geared Couplings using Spectrum Methods*, Proc. of the 20th Annual Meeting of the Vibration Institute, Saint Louis, Missouri, USA 1996.
8. G. Dalpiaz, A. Rivola, R. Rubini - *Gear fault monitoring: comparison of vibration analysis techniques* - Proc. of the 3rd Int. Conf. on Acoustical and Vibratory Surveillance Methods and Diagnostic Techniques, Senlis

(France), 13-15/10/1998, Courbevoie: Société Française des Mécaniciens, Vol. 2, pp. 623-631.

9. G. Dalpiaz, A. Rivola, R. Rubini, *Dynamic modelling of gear systems for condition monitoring and diagnostics* - Congress on Technical Diagnostics, 1996.
10. Niola V., Quaremba G., Forcelli A., *Gear Noise Detection. An Integrated Method using Fourier and Wavelet Approach* - ICOSSE'07 Proc. of the 6th WSEAS Int. Conf. on System science and simulation in engineering, Venezia, Italy, 2007, pp.96-102.
11. F.K. Choy, D.H. Mugler and J. Zhou, *Damage Identification of a Gear Transmission Using Vibration Signatures*, ASME Trans. J. Mechanical Design, Vol. 125 , pp. 394-403, 2003.
12. Takens, F., *Detecting strange attractors in turbulence*, in *Dynamical systems and turbulence*, Lecture notes in mathematics, Eds. D.A. Rand & L.S. Young, Springer-Verlag, Hidelberg, pp. 366-381, 1981.
13. Mayer-Kress, G. editor, *Dimension and entropies in chaotic systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
14. Kostelich, E.J., *Problems in estimating dynamics from data*, Physica D, vol. 58, pp. 138-152, 1992.
15. Abarbanel, H.D.I., *Analysis of observed chaotic data*, Springer-Verlag, New York, 1996.
16. Oseledec, A., *A multiplicative ergodic theorem-Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems*, IEEE Int. Conf. ASSP, vol. 19, pp. 179-210, 1992.

17. Walters, P., *An introduction to ergodic theory*, Springer graduate text in Mathematics, vol. 79, Springer-Verlag, Berlin, 1982.
18. Niola V., Quaremba G., Oliviero R. - *The location of anomalous spikes on a working rotor: a theoretical-experimental test* - Int. J. Appl. Mec. Eng. Vol. 9, n. 3, pp. 547-556, 2004.
19. Niola V., Quaremba G., Avagliano V. – *Vibration monitoring of gear transmission* – Proc. of 9th WSEAS Int. Conf. on SIMULATION, MODELLING AND OPTIMIZATION at Budapest Tech, Budapest, Hungary, September 3-5, 2009.
20. Niola V., Quaremba G. - *The Gear Whine Noise and vibro-acoustic emission of gearbox* - Proc. 11th WSEAS Int. Conf. on Robotics, Control and Manufacturing Technology, pp. 138-143, 2011.
21. Niola V., Quaremba G., Avagliano V. – *A new index for monitoring the duration test* – WSEAS TRANS. on SYSTEMS, Issue 8, Vol. 8, pg. 968 – 977, August 2009.
22. Niola V., Quaremba G., Avagliano V. – *A real time algorithm for monitoring the gearbox reliability test* – WSEAS TRANS. on SYSTEMS, Issue 7, Vol. 8, pg. 866 – 875, July 2009.
23. Niola V., Avagliano V., Quaremba G. - *The problem of GWN* - The 13th WSEAS International Conference on MATHEMATICAL and COMPUTATIONAL METHODS in SCIENCE and ENGINEERING (MACMESE '11), Catania, Sicily, Italy November 3-5, 2011, pp. 363-370.
24. Niola V., Avagliano V., Quaremba G. - *The Gear Whine Noise* - 4th WSEAS Int. Conf. in Engineering Mechanics, structures engineering Geology, Corfù, July 14-16, 2011, pp. 445-450.

25. Niola V., Quaremba G., Avagliano V. – *Nearly Real-Time Monitoring of Gearbox Vibration Signal using DWT* - WSEAS press, 6th WSEAS Intern. Conf. on DYNAMICAL SYSTEMS and CONTROL (CONTROL '10), Kantaoui, Sousse, Tunisia 7 pg. 196, May 3-6, 2010.
26. Niola V., Quaremba G., Avagliano V. – *Further developments on gear transmission monitoring* – Proc. of 9th WSEAS Int. Conf. on SIMULATION, MODELLING AND OPTIMIZATION at Budapest Tech, Budapest, Hungary, September 3-5, 2009.
27. Niola V., Quaremba G. - *A Wavelet application for improving the kinematical quality of gear transmission* - WSEAS TRANS. on SYSTEMS, Vol. 6, n.1, pp. 47-53, 2007.
28. S. Glondež, Z. Ren, *Modelling of crack growth under cyclic contact loading* – Faculty of Mechanical Engineering, University of Maribor, Slovenia - Theoretical and Applied Fracture Mechanics 30, pp.159-173, (1998).
29. G. Faidiga, J. Flašker, S. Glodež and T.K. Hellen, *Numerical modelling of micropitting of gear teeth flanks* – Faculty of Mechanical Engineering, University of Maribor, Slovenia (2000) - Blackwell Publishing Ltd. – (2003), Fatigue Fract Engng Mater Struct 26, pp. 1135-1143.
30. J. Flašker, G. Fajdiga, S. Glodež and T.K. Hellen, *Numerical simulation of surface pitting due to contact loading* – Faculty of Mechanical Engineering, University of Maribor, Slovenia (2001) - International Journal of Fatigue 23, pp. 599-605, (2001).
31. O.P. Datsyshyn, V.V. Panasyuk, *Pitting of the rolling bodies contact surface* - Karpenko Physico-Mechanical Institute, National Academy of Sciences of Ukraine, - Wear 251 (2001) 1347–1355.

32. F. Antoine and J.M. Besson, *Simplified modellization of gear micropitting* – Stress Department, Eurocopter, Marignane, France (2002).
33. Z. Ren, S. Glondež, *Computational service life estimation of contacting mechanical elements in regard to pitting*, Computer and Structures 80, pp. 2209-2216, (2002).
34. R. Dwyer-Joyce, J.C. Hamer, J.M. Hutchinson, E. Ionannides, R.S. Sayles, *A pitting fatigue model for gear tooth contacts*, Vehicle Tribology, paper XIV, pp.391-400, (1991).
35. Goldwin G., De Botton G., Rivin B., Sher E., *Studying the relationship between the vibration signature and combustion process in diesel engines*, SAE technical paper 2004 – 01 – 1786, 2004, doi:10.4271/2004-01-1786, date published 2004-03-08.
36. Stratonovich R.L., *Topics in the Theory of Random Noise*, Vol. II, Gordon and Breach, New York, (1967).
37. Bandt C., Pompe B., *Permutation Entropy: A Natural Complexity Measure for Time Series*, Physical Review Letters, Vol. 88, N. 17, (2002).
38. Rosenstein M.T., Collins J.J., De Luca C.J., *A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets*, Boston University, USA, (1992).
39. Moon F.C., *Chaotic Vibrations*, John Wiley & Sons, New York, (1987).
40. Ogden R.T., *Essential Wavelets for Statistical Applications and Data Analysis*, Boston, Birkhäuser, (1997).

41. Chui C.K., *An Introduction to Wavelets*, Vol. 1, Academic Press, New York, (1992).
42. Daubechies I., *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM, Philadelphia, Penn., (1992).
43. Burrus C.S., Gopinath R.A., Guo H., *Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms – A Primer*, Prentice Hall, New Jersey, (1998).
44. Chui C.K., *Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*, Academic Press, New York, (1992).
45. Frazier M.W., *An Introduction to Wavelets through Linear Algebra*, Springer-Verlag, New York, (1999).
46. Benedetto J.J., Frazier M.W., *Wavelets Mathematics and Applications*, CRC Press, New York, (1994).
47. Walter G.G., Shen X., *Wavelets and other Orthogonal Systems*, Second Edition, Chapman & Hall/CRC, New York, (2001).
48. Meyer Y., *Wavelets Algorithms & Applications*, SIAM, Philadelphia, (1993).
49. Wickerhauser M.V., *Adapted Wavelet Analysis from Theory to Software*, A K Peters, Natick, Massachusetts, (1994).
50. Mallat S., *A Wavelet tour of signal processing*, Second Edition, Academic Press, New York, (2001).
51. Autori Vari, *Wavelets and Statistics*, Springer-Verlag, New York, (1995).

52. Teolis A., Computational Signal Processing with Wavelets, Birkhäuser, Boston, (1998).
53. Härdle W., Kerkycharian G. et al., *Wavelets, Approximation and Statistical Applications*, Springer-Verlag, New York, (1998).
54. Crow E.L., Davis F.A., Maxfield M.W., *Statistics Manual*, Dover Pub., New York, (1960).
55. Dempsey P.J., *A Comparison of Vibration and Oil Debris Gear Damage Detection Methods Applied to Pitting Damage*, NASA/TM-2000-210371, Cleveland, Ohio, (2000).
56. Cao Y., Tung W.W., Gao J.B., Hively L.M., *Detecting dynamical changes in time series using the permutation entropy*, Physical Review, E 70, 046217, The American Physical Society, (2004).
57. Samuel P.D., Pines D.J., *A review of vibration-based techniques for helicopter transmission diagnostics*, Journal of Sound and Vibration, Elsevier, (2005).
58. Halim E.B., Shah S.L., Zuo M.J., Choudhury M.A.A.S., *Fault Detection of Gearbox from Vibration Signals using Time-Frequency Domain Averaging*, Proc. of the 2006 American Control Conference, Minneapolis, Minnesota, USA, (2006).
59. Wang W., Golnaraghi F., Ismail F., *Condition monitoring of multistage printing presses*, Journal of Sound and Vibration, 270, Elsevier, (2004).
60. Schoen R.R., Habetler T.G., Kamran F., Bartheld R.G., *Motor Bearing Damage Detection using Stator Current Monitoring*, IEEE Trans. on Industry Applications, Vol. 31, N. 6, (1995).

61. Raad A., Antoni J., Sidahmed M., *Indicators of cyclostationarity: Theory and application to gear fault monitoring*, Mechanical System and Signal Processing, 22, Elsevier, (2008).
62. Lin J., Qu L., *Feature Extraction Based on Morlet Wavelet and its Application for Mechanical Fault Diagnosis*, Journal of Sound and Vibration, 234(1), (2000).
63. Yang W.X., Ren X.M., *Detecting Impulses in Mechanical Signals by Wavelets*, EURASIP Journal on Applied Signal Processing, 8, (2004).
64. Bonnardot F., Randall R.B., Guillet F., *Extraction of second-order cyclostationary sources – Application to vibration analysis*, Mechanical Systems and Signal Processing, 19, Elsevier, (2005).
65. Quiroga R.Q., Kreuz T., Grassberger P., *Event synchronization: A simple and fast method to measure synchronicity and time delay patterns*, Physical Review, E, 66, 041904, (2002).
66. Chelidze D., *Identifying Multidimensional Damage in a Hierarchical Dynamical System*, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, (2004).
67. Fraser A.M., Swinney H., *Independent coordinates for strange attractors from mutual information*, Physical Review, A, Vol. 33, N. 2, (1986).
68. Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J., *Comment on "Phase synchronization in discrete chaotic systems"*, Physical Review, E, Vol. 63, 058201, The American Physical Society, (2001).
69. Giannerini S., Rosa S., *Caos, Statistica e Metodi di Ricampionamento*, Statistica, anno LXII, N. 3, (2002).

70. Niola V., Quaremba G., *Sul principio della ortogonalità della risposta dinamica in sistemi meccanici complessi*, Atti Workshop 2004 "Progettazione e validazione di sistemi di trasmissione a camma", Cassino, 5 marzo 2004.
71. Niola V., Quaremba G., Nasti G., *A wavelet application identifying simulated anomalies superimposed to real signal carried out from a rigid rotor*, IASME TRANSACTIONS, Issue 1, Vol. 1, January, (2004).
72. Niola V., Oliviero R., Quaremba G., *Estimating the threshold parameter of a generalized Pareto Distribution by a wavelet method*, Atti Convegno MAF 2004, Salerno, (2004).
73. Niola V., Quaremba G., Nasti G., *Several aspects in determining the presence of turbulences generated in a lubricating oil flow*, 4th AIMETA International Tribology Conference, Roma, (2004).
74. Niola V., Quaremba G., Oliviero R., *A method for classifying turbulences generated in a lubricating oil flow*, 4th AIMETA International Tribology Conference, Roma, (2004).
75. Niola V., Oliviero R., Quaremba G., *Fuzzy logic for the classification of a complex signal analysed by wavelets for the diagnostic of mechanical systems*, 5th International Conference "Acoustical and Vibratory Surveillance Methods and Diagnostic Techniques, Senlis, France, (2004).
76. Niola V., Oliviero R., Quaremba G., *The definition of the optimum threshold for emphasizing features of surface roughness*, WSEAS Transactions on Advances in Engineering Education, Issue 1, Vol. 1, (2004).

77. Niola V., Nasti G., Quaremba G., *A problem of emphasizing features roughness by means the Discrete Wavelet Transform*, International Journal of Materials Processing Technology – Elsevier , Vol. 164 -165, (2005).
78. Niola V, Oliviero R., Quaremba G., *The problem of signal denoising for detecting the presence of spikes*, Proc. 5th International Conf. on Signal processing, Robotics and Automation, Madrid, (2006).
79. Niola V., Quaremba G., *On the Operating condition of Mechanical System*, Proc. International Conference, Prague, (2006).
80. Niola V., Quaremba G., *The analysis of a crank mechanism by Wavelet Transform*, Transactions on Systems, Issue 5, Vol. 5,(2006).
81. Mongiello C., Niola V., Quaremba G., *Spectral-like Approach to Modelling the Liquid Fuel. Atomisation Process in a Reactor*, Proc. of the 11th WSEAS International Conference on Systems, Agios Nikolaos, Crete Island, Greece, July 23-25, 2007- Pubblicato sul libro "Systems Theory and Applications", pagg. 303-309, ISBN 978-960-8457-90-4, (2007).
82. Fiorenza R., *Appunti delle Lezioni di Analisi Funzionale*, Università degli Studi di Napoli, Federico II, Italy, COINOR.
83. Ernesto Conte, *Lezioni di teoria dei segnali*, Liguori Editore, 1996.
84. Renato Della Volpe, Mariano Migliaccio, *Appunti delle lezioni di motori per autotrazione*, Istituto grafico italiano, 1976.
85. Nicola Fedele, *Corso di Analisi Matematica*, Liguori Editore, 2002.
86. Gnedenko B.V., *The Theory of Probability*, MIR Pub., Moscow, (1978).

87. Aboufadel E., Schlicker S., *Discovering Wavelets*, John Wiley & Sons, New York, (1999).
88. Zakrajsek J.J., *Detecting Gear Tooth Fatigue Cracks in Advance of Complete Fracture*, NASA, Technical Memorandum, 107145, Cleveland, Ohio, (1996).
89. Vecer P., Kreidl M., Smid R., *Condition Indicators for Gearbox Condition Monitoring Systems*, Acta Polytechnica, Vol. 45, N. 6, (2005).
90. Wang W.Q., Ismail F., Golnaraghi M.F., *Assessment of Gear Damage Monitoring Techniques using Vibration Measurements*, Mechanical Systems and Signal Processing, 15(5), Academic Press, (2001).
91. Wang. K., *Phase Information at Tooth Mesh Frequency for Gear Crack Diagnosis*, Second IEEE Conf. on Industrial Electronics and Applications, IEEE, (2007).
92. Fan X., Zuo M.J., *Gearbox fault detection using Hilbert and Wavelet packet transform*, Mechanical Systems and Signal Processing, 20, (2006).
93. McFadden P.D., *Detecting fatigue cracks in gears by amplitude and phase demodulation of meshing vibration*, Journal of Vibrations, Acoustics, Stress and Reliability in Design, 108, (1986).
94. Dalpiaz G., Meneghetti U., *Monitoring fatigue cracks in gears*, NDT&E International, 24, (1991).
95. Ismail F., Martin H., Omar F., *A statistical index for monitoring tootcracks in a gearbox*, Proc. of the ASME Biennal Conference on Vibration and Noise, Vol. DE-84-1, Boston, MA (1995).
96. Niola V., Quaremba G., Avagliano V. – *The Parameters influencing the GWN* – WSEAS TRANS. on SYSTEMS, Issue 8, Vol. 11, pg. 283 – 293, August 2012.